Curs de analiză complexă

Bogdan Marcel

Cuprins

Introducere

Acest curs se adresează studenţilor ce doresc să aibă la îndemână elemente de analiză complexă. Absolvenţii secţiei matematică - informatică au posibilitatea de a aprofunda acest domeniu urmând calea unui masterat cu specializarea Analiză complexă. Câteva direcţii de dezvoltare ale acestei ramuri a analizei se pot găsi în [5], [3].

Cursul este structurat în patru capitole. Primul capitol reia noţiunile caracteristice numărului complex. Totodată se definesc funcţiile complexe elementare.

Capitolul al doilea este dedicat noţiunii de derivabilitate a unei funcţii complexe.

Al treilea capitol prezintă integrala complexă.

Capitolul patru prezintă seriile Laurent. Teorema reziduurilor este rezultatul clasic al unui curs de introducere în analiza complexă. Ca şi aplicaţii ale acestei teoreme se regăsesc câteva clase de integrale definite ce se pot calcula cu o relativă uşurinţă.

Motto-ul anexat cursurilor dedicate studenţilor de la IFRD este următorul: ”Nu avem pretenţia că am scris lucruri noi. Am dorit însă o împrospătare a noţiunilor. Nu am dorit să fie un curs *remixat*, am pornit însă cu lucruri vechi *de când lumea ... matematicii moderne* (sec. al XIX - lea).” Există câteva rezultate cum ar fi Teorema lui Hurwitz sau Principiul maximului modulului necuprinse în acest curs. Pentru durata unui semestru însă este conţinută suficientă informaţie.

Baza acestui curs se constituie în bună parte din notiţele subsemnatului din anul II urmat la Facultatea de Matematică a Universităţii ”Babeş - Bolyai” din Cluj-Napoca.

Capitolul 1

Mulţimea numerelor complexe

În acest capitol se reaminteşte construcţia numerelor complexe. Se vor reaminti cele două forme algebrică respectiv trigonometrică ale unui număr complex. Topologia pe $\mathbb{C}$ este cea indusă de metrica $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi este echivalentă (aceeaşi) cu topologia euclidiană pe $\mathbb{R}^2$. Se vor considera funcţiile complexe elementare: polinomială, raţională, exponenţială, trigonometrice, logaritm complex, putere şi arc-funcţiile. Ca un caz particular de funcţie raţională se vor studia funcţiile omografice.

1.1 Noţiunea de număr complex

Se notează $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Pe această mulţime se definesc două operaţii, denumite "adunare": $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, respectiv "înmulţire": $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, astfel

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

respectiv

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tripletul $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ are o structură algebrică de corp comutativ. Prin definiţie aceasta înseamnă că $(\mathbb{R}^2, +)$ este grup abelian, $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ este monoid comutativ, "$\cdot$" este distributivă faţă de "+" şi orice element nenul este inversabil (orice element diferit de $(0, 0)$ este simetrizabil în raport cu înmulţirea definită mai sus).

Definiţia 1.1.1. *Mulţimea* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *se numeşte* **mulţimea numerelor complexe** *şi se notează* $\mathbb{C}$. *Un element al acestei mulţimi se numeşte* **număr complex**.

În general numerele complexe se notează cu litera z. Fără nicio restricţie se pot nota cu u, w, x ş.a.m.d. Un inconvenient evident este acela de a opera cu numerele complexe scrise în forma $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Între înmulţirea a două numere complexe şi ridicarea la putere, din punct de vedere matematic nu este nicio diferenţă. Practic însă "pe hârtie" acest mod de scriere este greoi. Spre deosebire de calculatoare care sunt "încântate" de acest mod de operare.

S-a urmărit obţinerea unei alt mod de a scrie un număr complex. O submulţime a lui $\mathbb{C}$ este mulţimea $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Între această mulţime şi $\mathbb{R}$ există un omeomorfism bijectiv $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$, $\varphi(x) = (x, 0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel $\mathbb{R} \times \{0\} \simeq \mathbb{R}$, cu alte cuvinte în loc de a scrie un număr complex de forma $(a, 0)$ scriem doar a. Numărul complex $(7, 0)$ este 7.

Se notează numărul complex nereal $i = (0, 1)$. El se bucură de proprietatea

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Alfel spus, numărul complex i verifică ecuaţia $z^2 + 1 = 0$. Trebuie remarcat că $(-i)^2 = -1$ şi astfel evitată "capcana" din scrierea $\sqrt{-1} = i$. Corect este $\sqrt{-1} = \{-i, i\}$. Mai mult, avem

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y.$$

Definiţia 1.1.2. *Forma* $x + i \cdot y$ *a unui număr complex* $(x, y) \in \mathbb{C}$ *se numeşte* **formă algebrică**.

În concluzie, mulţimea numerelor complexe este

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Ar trebui să fie sesizabilă uşurinţa scrierii în formă algebrică. Spre exemplu $(1 + i)^2 = 2i$, $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$, $(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^3 = 1$.

Pentru un număr complex $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ se definesc următoarele:

i) $\operatorname{Re} z = x$, partea reală a lui z;

ii) $\operatorname{Im} z = y$, partea imaginară a lui z;

iii) conjugatul lui z, notat $\bar{z} = x - iy$;

iv) modulul lui z prin $|z|^2 = z\bar{z}$.

Este utilă observaţia: pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ şi } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Pe lângă aceasta sunt binecunoscute câteva proprietăţi:

I) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ şi $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

II) pentru $z \in \mathbb{C}$ avem $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$;

III) pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $|z| = |\bar{z}|$;

IV) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ şi $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

V) pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ avem $\operatorname{Re} z/|z| \in [-1, 1]$ şi $\operatorname{Im} z/|z| \in [-1, 1]$.

Exemple

1. Să se arate că pentru $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ numărul $z = (1 + ai)^n + (1 - ai)^n$ este real.
   Avem $\bar{z} = \overline{(1 + ai)}^n + \overline{(1 - ai)}^n = (1 - ai)^n + (1 + ai)^n = z$.

2. Să se arate că pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

   Se "demodulează" membrul stâng astfel

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)},$$

   după care se aplică proprietatea IV) şi se operează parantezele.

Exerciţii

1) Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care

$$|z - i| = |z + i| = |z - 1|.$$

2) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ să se calculeze $x_1^{2007} + x_2^{2007}$ şi $(x_1 + 1)^{2008} + (x_2 + 1)^{2008}$.

3) Să se arate că are loc egalitatea

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_3|^2 + |z_2 + z_3|^2,$$

pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Să se dea o interpretare geometrică relaţiei precedente.

4) Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_k| = 1, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Să se arate că numărul $z = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$ este real.

5) Fie $u, v, z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|u| < 1$ şi $|v| = 1$ şi fie $w = v \cdot \dfrac{z-u}{1-\bar{u}z}$. Să se arate că $|w| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leq 1$.

6) Fie $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă

$$u_1 + u_2 z + \bar{u}_2 \bar{z} = v_1 + v_2 z + \bar{v}_2 \bar{z}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ atunci $u_1 = u_2$ şi $v_1 = v_2$.

7) Să se arate că

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

pentru orice $z_1, z_2 \in U = U(0; 1)$.

8) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3| \ (Hlawka).$$

9) Să se arate că funcţia $d_R : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dată de

$$d_R(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}},$$

este o metrică.

Indicaţii şi răspunsuri: 1) $z = 0$ (algebric, căutând $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ sau geometric); 2) 2; -1; 3) se poate folosi $|z|^2 = z\bar{z}$; 4) se poate folosi proprietatea IV); 5) se evaluează $w\bar{w}$;
6) se pot atribui valori convenabile lui z; 7) se ridică la pătrat şi se demodulează; 8) inegalitatea este omogenă. După împărţirea cu z_3 se ridică la pătrat, după care se aplică de trei ori inegalitatea triunghiului; 9) se verifică axiomele metricii; pentru

inegalitatea triunghiului se ridică la pătrat.

Pe lângă forma algebrică a unui număr complex se mai foloseşte şi o alta. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ există $\theta \in [0, 2\pi[$ încât

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta). \tag{1.1}$$

Pentru $z = 0$, valoarea θ poate fi aleasă oricât. Pentru $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, avem $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi$, unde $k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x, y > 0, \\ 1, & \text{dacă } x < 0, \\ 2, & \text{dacă } x > 0, y < 0. \end{cases}$ Pentru $x > 0$, $y = 0$ avem $\theta = 0$, pentru $x = 0$, $y > 0$ avem $\theta = \pi/2$, pentru $x < 0$, $y = 0$ avem $\theta = \pi$, iar pentru $x = 0$, $y < 0$ avem $\theta = 3\pi/2$,

Definiţia 1.1.3. *Forma unui număr complex din relaţia* (1.1) *se numeşte* **formă trigonometrică**.

Valoarea θ (unic determinată (!) pentru orice $z \neq 0$) se numeşte **argument principal** şi se notează $\arg z$. Este uşor deductibilă proprietatea

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \,(mod\, 2\pi)$$

şi de aici $\arg(z^n) = n \arg z (mod\, 2\pi)$ şi $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 (mod\, 2\pi)$, pentru orice $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ nenule.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se poate pune problema determinării lui $u \in \mathbb{C}$ încât $u^n = z$, cu $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ dat. Fie $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ cu $r = |z| > 0$ şi $\theta = \arg z \in [0, 2\pi[$. Se caută $\rho = |u| > 0$ şi $\varphi = \arg u \in [0, 2\pi[$ încât $[\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r(\cos\theta + i \sin\theta)$. Avem $\begin{cases} \rho^n \cos n\varphi = r \cos\theta \\ \rho^n \sin n\varphi = r \sin\theta \end{cases}$. De aici $\rho^n = r$, $\cos n\varphi = \cos\theta$ şi $\sin n\varphi = \sin\theta$. Astfel s-au determinat $\rho = \sqrt[n]{r}$ şi $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. În concluzie, se defineşte **radicalul complex**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Exemple

1. Pentru a determina $\sqrt[7]{-i+1}$ avem $|-i+1| = \sqrt{2}$ şi $\arg(-i+1) = \operatorname{arctg}(-1) + 2\pi = 7\pi/4$. Astfel, cele şapte valori sunt $\sqrt[14]{2}\big(\cos(\pi/4 + 2k\pi/7) + i \sin(\pi/4 + 2k\pi/7)\big)$; $k \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$.

2. Rezolvarea ecuaţiei $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$, impune substituţia $z^2 = u$ aflându-se rădăcinile $u = -1$ şi $u = i$, astfel $z_{1,2} \in \{-i, i\}$ respectiv $z_{3,4} \in \{(-1-i)\sqrt{2}/2, (1+i)\sqrt{2}/2\}$.

Exerciţii

1) Să se calculeze $\sqrt{-1}$ şi $\sqrt[3]{1-i}$.

2) Să se reprezinte mulţimea punctelor din plan pentru care:

a) $0 < \arg z < \pi/6$; b) $\pi/4 \leq \arg z < \pi/3$;
c) $\pi/6 \leq \arg z \leq \pi/3; , |z| = 1$; d) $4\pi/3 < \arg z < 5\pi/3$; $|z| \leq 1$.

3) Fie $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\omega = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$. Să se calculeze $\arg(\varepsilon^{2007} \cdot \omega^{2008})$.

4) Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi $\varphi \in (0, 2\pi)$. Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\varphi = \frac{1 - a\cos\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi + a^{n+2}\cos n\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}.$$

Să se deducă de aici că $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos k\varphi = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$, pentru $|a| < 1$.

5) Să se stabilească formulele:

a) $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \cdot \sin^2 x - 5\cos x \cdot \sin^4 x$;

b) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$.

6) Să se calculeze $\sqrt[4]{-7+24i}$ şi apoi $(2+i)^4$.

7) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $z + \dfrac{1}{z} = 2\sin a$. Să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

8) Fie $p \geq 2$. Să se arate că

$$2(|z_1|^p + |z_2|^p) \leq |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p,$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Indicaţii şi răspunsuri: 1) $\arg(-1) = \pi, \arg(1-i) = 7\pi/4$; 3) se folosesc proprietăţile $\arg(uv) = \arg u + \arg v \,(mod\, 2\pi)$ şi $\arg(u^n) = n\arg u \,(mod\, 2\pi)$; 0; 4) se calculează în două moduri $\sum_{k=0}^{n}[a(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k$; 5) a) se calculează în două moduri $(\cos x + i\sin x)^5$; b) se evaluează $(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)^n$;
7) $z_1 = \sin a + i\cos a = \cos(\pi/2 - a) + i\sin(\pi/2 - a)$; 8) inegalitatea este omogenă. Se folosesc inegalităţile $1 + r^p \leq 1 + (p/2)r^2 \leq (1 + r^2)^{p/2}$, cu $0 \leq r \leq 1$.

1.2 Elemente de topologie

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $r > 0$ dat. Se consideră următoarele mulţimi:

$$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\} \overset{not}{=} \partial U(z_0, r), \text{ } \textbf{cercul} \text{ de centru } z_0 \text{ şi rază } r;$$

$$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}, \text{ } \textbf{discul deschis} \text{ de centru } z_0 \text{ şi rază } r;$$

$$\bar{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}, \text{ } \textbf{discul închis} \text{ de centru } z_0 \text{ şi rază } r;$$

$$U(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \text{ } \textbf{coroana circulară} \text{ de centru } z_0$$

şi raze r_1, r_2 cu $0 < r_1 < r_2$.

Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mulţimea

$$[z_1, z_2] = \{(1 - t)z_1 + tz_2 \,|\, t \in [0, 1]\}$$

se numeşte **segment de capete** z_1, z_2.

Definiţia 1.2.1. *O mulţime nevidă $G \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* **deschisă** *dacă pentru orice $z_0 \in G$ există $r > 0$ încât $U(z_0, r) \subseteq G$. O mulţime nevidă $F \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* **închisă** *dacă $\mathbb{C} \setminus F$ este deschisă.*

Definiţia 1.2.2. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. O mulţime nevidă $V \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* **vecinătate** *pentru α dacă există $r > 0$ încât $U(\alpha, r) \subseteq V$.*

Exerciţii

1) Să se reprezinte mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

a) $|z - 2i| < 1$ şi $|z - i| > 1/2$; b) $|z + i| < |z - 1|$;
c) $|z - 2| = |\operatorname{Re} z|$; d) $|z + i| + |z - i| \leq 3$.

2) Să se reprezinte mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

a) $1 < |z| < 2$; b) $1 < |z - i| < 3$;
c) $1 \leq |z + i| < 2$; d) $1 < |2z - i + 1| < 2$.

3) Să se reprezinte următoarele mulţimi:

a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$; b) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 1\}$;
c) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \operatorname{Im} z < 0\}$; d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 1\}$.

4) Să se determine în funcţie de $a \in \mathbb{R}$ mulţimea punctelor din plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pentru care

$$az\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0, \ \ z = x + iy.$$

Indicaţii şi răspunsuri: 1) a) $U(2i, 1) \cap (\mathbb{C} \setminus U(2i, 1/2))$; b) semiplanul (deschis) delimitat de mediatoarea segmentului $[-i, 1]$; 2) coroane circulare; 3) a), c) semidiscuri, d) semiplan; 4) $a = 0$ dreaptă, $a \neq 0$ cerc.

Definiţia 1.2.3. *Spunem că şirul de numere complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** *către* $\alpha \in \mathbb{C}$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon, \ \ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Fie şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n = 1/2^n + i\frac{7n+6}{n+1}$. Vom arăta, folosind definiţia, că $z_n \to 7i$. Fie $\varepsilon > 0$ şi evaluăm $|z_n - 7i| = \sqrt{1/2^{2n} + 1/(n+1)^2} < 2/(n+1) < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, cu $n_\varepsilon = [2/\varepsilon - 1] + 1$, dacă $\varepsilon \geq 2$ şi evident $n_\varepsilon = 1$, dacă $0 < \varepsilon < 2$. În multe situaţii se poate utiliza următorul criteriu.

Propoziţia 1.2.1. *Fie şirul de numere complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *cu* $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. *Atunci*

$$z_n \to \alpha \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow x_n \to \operatorname{Re}\alpha \textit{ şi } y_n \to \operatorname{Im}\alpha.$$

Demonstraţie. Pentru " $\Longrightarrow$ " se utilizează inegalităţile elementare $|x_n - \operatorname{Re}\alpha| \leq |z_n - \alpha|$ şi $|y_n - \operatorname{Im}\alpha| \leq |z_n - \alpha|$ iar pentru " $\Longleftarrow$ " rezultă direct din exprimarea modulului complex. □

Urmărind exemplul de mai sus, avem $x_n \to 0$ şi $y_n \to 7$ astfel că $z_n \to 7i$.

Teorema 1.2.1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}$ *fixat. Şirul de numere complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *cu termenul general dat de* $z_n = (1 + \alpha/n)^n$ *este convergent. Limita sa se va nota* e^α.

Demonstraţie. Fie $\alpha = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Presupunem $\alpha \neq 0$. Avem $|z_n|^2 = [(1 + x/n)^2 + y^2/n^2]^n$, de unde $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = e^x$. Avem $\arg z_n = n \operatorname{arctg} \dfrac{y/n}{1 + x/n} (mod\, 2\pi)$, de unde $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg z_n = y\, (mod\, 2\pi)$. Astfel

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Pentru $\alpha = 0$ avem şirul constant, evident convergent şi anume $z_n \to 1 = e^0$. □

Exemple

1. Fie şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n = \sin n/n + i(n+1)^{1/n}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = 0$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$.

2. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat cu $|z_0| \neq 1$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n = z_0^n$. Dacă $|z_0| < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Dacă $|z_0| > 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Dacă termenii şirului sunt în formă trigonometrică $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, $\rho_n > 0$, $\theta_n \in [0, 2\pi[$ din exemplul de mai sus putem deduce atunci că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = +\infty$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = s \in (0, +\infty)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \alpha \in (0, +\infty)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Exerciţii

1) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ pentru:

a) $z_n = \sin n/n + i(n+1)^{1/n}$; b) $z_n = n\ln(1+1/n) + i(n+1)/n$;
c) $z_n = \sum_{k=1}^{n}(i/2)^k$; d) $z_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos kx + i\sin kx)/2^k, x \in \mathbb{R}$;
e) $z_n = \frac{1}{2^n} + i\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$; f) $z_n = \big(1+\frac{\pi i}{2n}\big)^n$.

2) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ pentru:

a) $z_n = \frac{2n}{n+1}\big[\cos\theta_n\pi + i\sin\theta_n\pi\big]$, unde $\theta_n = \frac{n+1}{2n+1}$;
b) $z_n = \sqrt[n]{n}\big[\cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)\big]$;c) $z_n = \big(\frac{1+i}{2}\big)^n$.

3) Fie $z \in \mathbb{C}$ fixat. Să se determine $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ dacă:

a) $z_n = (n+i)z^n$; b) $z_n = \dfrac{1-ni}{1+2ni}z^n$.

Răspunsuri: 1) a) i; b); $1+i$; c) i; d) $\dfrac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$; e) ie; f) i; 2) a) $2i$; b) 1; c) 0; 3) a) $|z|$; b) $|z|/2$.

Extinderea muţimii $\mathbb{C}$ se face prin adăugarea simbolului ∞. Astfel $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ încât $\infty \notin \mathbb{C}$. În $\mathbb{C}_\infty$ nu se folosesc simbolurile $+\infty$ sau $-\infty$. Simbolul $\infty \in \mathbb{C}$ are semnificaţia limitei unui şir de numere complexe $(z_n)_n$ pentru care $|z_n| \to +\infty$. Altfel scris $|\infty| = +\infty$. Operaţiile cu acest simbol sunt următoarele:

$$\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty,\ \alpha \in \mathbb{C};$$

$$\infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty,\ \alpha \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\};$$

$$\alpha/0=\infty,\ \alpha\in\mathbb{C}_\infty\setminus\{0\};\ \alpha/\infty=0,\ \alpha\in\mathbb{C}.$$

Semnificaţia lor este similară cu analiza din $\mathbb{R}$ anume: dacă $(z_n)_n$ este un şir încât $z_n\to\infty$ iar $(z_n')_n$ este un şir convergent atunci pentru şirul $(z_n+z_n')_n$ avem $z_n+z_n'\to\infty$ iar pentru şirul $(z_n\cdot z_n')_n$ avem $z_n\cdot z_n'\to\infty$ dacă $z_n'\nrightarrow 0$.

Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ nevidă. O funcţie $f:D\to\mathbb{C}$ se numeşte **funcţie complexă**. Noţiunile de limită şi continuitate pentru funcţii vectoriale sunt valabile în particular pentru funcţii complexe.

Definiţia 1.2.4. *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ nevidă şi $\alpha\in\mathbb{C}$ un punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia $f:D\to\mathbb{C}$* **are limită** *în punctul α egală cu $l\in\mathbb{C}$ dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n\in D$, $z_n\neq\alpha$, $z_n\to\alpha$ avem $f(z_n)\to l$.*

Dacă ∞ este punct de acumulare pentru D, spunem că funcţia f **are limită** *la ∞ egală cu l_∞ dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n\in D$, $z_n\to\infty$ avem $f(z_n)\to l_\infty$.*

Vom nota $\lim\limits_{z\to\alpha}f(z)=l$, respectiv $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)\overset{not}{=}f(\infty)=l_\infty$.

Definiţia 1.2.5. *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ nevidă şi $\alpha\in D$. Spunem că funcţia $f:D\to\mathbb{C}$ este* ***continuă*** *în punctul α dacă pentru orice şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $z_n\in D$, din $z_n\to\alpha$ să avem $f(z_n)\to f(\alpha)$.*

Caracterizarea continuităţii se regăseşte în următoarea teoremă.

Teorema 1.2.2. *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ nevidă, $\alpha\in D$ şi funcţia $f:D\to\mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) *f este continuă în α;*

b) *pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât pentru orice $z\in D$ cu $|z-\alpha|<\delta$ să avem $|f(z)-f(\alpha)|<\varepsilon$;*

c) *pentru orice vecinătate V a lui $f(\alpha)$ există U o vecinătate a lui α încât $f(z)\in V$, pentru orice $z\in U$.*

Studiul continuităţii unei funcţii complexe este similar cu studiul funcţiilor vectoriale de două variabile reale. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ nevidă şi funcţia $f:D\to\mathbb{C}$. Se notează $u=\operatorname{Re}f$ şi $v=\operatorname{Im}f$ încât $u,v:G\to\mathbb{R}$, $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|z=x+iy\in D\}$ şi $f=u+iv$.

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re}^2 z}{\bar{z}}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$. Pentru $z = x + iy$, $z \neq 0$, se găseşte $u = u(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$. Funcţia u este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se pune problema continuităţii în punctul $(0, 0)$. Avem $|u(x, y)| = |x|x^2/(x^2 + y^2) \leq |x|$, pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ de unde se obţine continuitatea lui u. Analog se procedează pentru $v = v(x, y) = x^2 y/(x^2 + y^2)$.

2. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{\bar{z}}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$. Pentru $z = x + iy$, $z \neq 0$, se găseşte $u = u(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$. Funcţia u este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se pune problema continuităţii în punctul $(0, 0)$. Avem $u(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$. Vom căuta un şir $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ încât $(u(x_n, y_n))_n$ să fie divergent de unde se obţine discontinuitatea lui u. Definim $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ pentru n par şi $(x_n, y_n) = (1/n, 2/n)$ pentru n impar. Însă $u(x_n, y_n) = 1/2$ pentru n par şi $u(x_n, y_n) = 1/5$ pentru n impar. Analog se poate studia continuitatea lui v.

Exerciţii

1) Folosind criteriul $\varepsilon - \delta$, să se arate continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \bar{z}$ în punctul $\alpha \in \mathbb{C}$.

2) Să se studieze continuitatea funcţiilor $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ în punctul $z_0 = 0$.

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z} \operatorname{Im} z^2}{z^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$; b) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 \operatorname{Re} z}{\bar{z}^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$;

c) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^3}{z \operatorname{Re} z}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$; d) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 \operatorname{Re} z^2}{\bar{z}^3}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$;

e) $f(z) = \begin{cases} e^{\frac{z^2}{\operatorname{Re} z}}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$; f) $f(z) = \begin{cases} e^{\frac{\operatorname{Re} z^2}{z}}, z \neq 0 \\ 1, z = 0 \end{cases}$.

3) Să se arate că funcţiile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nu sunt continue în punctul $z_0 = 0$.

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z} \operatorname{Im} z}{z^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$; b) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z \operatorname{Re} z}{\bar{z}^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$;

c) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{\bar{z}\operatorname{Re} z}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$.

4) Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuă în $z_0 = 0$ cu $f(z_0) = 0$. Să se arate că

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \frac{|z - z_0|}{z - z_0} = 0.$$

5) Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|^2, |z| \leq 1 \\ z^3, |z| > 1 \end{cases}$.

6) Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} |z|, |z| \leq 1 \\ \sqrt[3]{z}, |z| > 1 \end{cases}$.

Indicaţii şi răspunsuri: 1) se determină δ în funcţie de ε încât din $|z - \alpha| < \delta$ să avem $|z^2 - \alpha^2 + \bar{z} - \bar{\alpha}| < \varepsilon$; 2) se determină $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f$ şi $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f$; e) f nu este continuă în 0.

1.3 Funcţii complexe elementare

Se vor considera următoarele funcţii:

Definiţia 1.3.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ cu $a_n \neq 0$. Aplicaţia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n,\ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţie polinomială** *(de grad n).*

Avem $\lim\limits_{z \to \alpha} P(z) = P(\alpha)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$, respectiv $\lim\limits_{z \to \infty} P(z) = P(\infty) = \infty$.

Definiţia 1.3.2. *Fie funcţiile polinomiale $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$. Aplicaţia $R : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ dată de*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ z \in \mathbb{C} \setminus D,$$

se numeşte **funcţie raţională**.

Fie α punct de acumulare pentru $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$. Avem $\lim\limits_{z \to \alpha} R(z) = R(\alpha)$. Dacă $grad\, P = m$, $grad\, Q = n$ avem $R(\infty) = \infty$ pentru $m > n$, $R(\infty) = 0$, pentru $m < n$ şi $R(\infty) \in \mathbb{C}^*$, pentru $m = n$.

Funcţia $J : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $J(z) = \dfrac{1}{2}(z + 1/z)$ se numeşte **funcţia lui Jukowski**. Prin extindere se defineşte $J_\infty : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $J_\infty(z) = J(z)$, pentru $z \in \mathbb{C}^*$ şi $J_\infty(0) = J_\infty(\infty) = \infty$.

Funcţia $K : G \to \mathbb{C}^*$, $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{e^{-i\theta}\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $K(z) = \dfrac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$ se numeşte **funcţia lui Koebe**.

O clasă specială de funcţii raţionale se constituie cele pentru care $grad\, P = grad\, Q = 1$ (a se vedea secţiunea 1.5).

În baza teoremei 1.2.1 pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ avem $e^\alpha \in \mathbb{C}$.

Definiţia 1.3.3. *Aplicaţia* $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$exp\,(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţie exponenţială**.

Avem $\lim\limits_{z \to \alpha} e^z = e^\alpha$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$. Întrucât funcţia exponenţială este periodică $exp(z + 2\pi i) = exp(z)$ nu există $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Avem $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ de unde $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$. Adunând cele două relaţii avem

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Uşor se obţine şi relaţia

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Astfel se definesc funcţiile complexe trigonometrice.

Definiţia 1.3.4. *Aplicaţia* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\cos\,(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţia cosinus**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\cos z$.

Definiţia 1.3.5. *Aplicaţia* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\sin\,(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţia sinus**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\sin z$.

Are loc formula fundamentală a trigonometriei:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ z \in \mathbb{C}.$$

Fără dificultate se pot arăta următoarele relaţii:

i) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

ii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

iii) $\cos(\pi/2 - z) = \sin z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Pentru a defini funcţia tangentă să determinăm soluţiile ecuaţiei $\cos z = 0$. Avem $e^{iz} = i$ sau $e^{iz} = -i$ astfel că $z = (2k+1)\pi/2$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Definiţia 1.3.6. *Aplicaţia* $\mathrm{tg} : \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\mathrm{tg}\,(z) = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţia tangentă**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\mathrm{tg}\, z$.

Pentru funcţiile hiperbolice se face extinderea (prelungirea) celor reale, anume $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(x) = \mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ şi $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\,(x) = \mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Definiţia 1.3.7. *Aplicaţia* $\mathrm{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\mathrm{ch}\ (z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţia cosinus hiperbolic**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\mathrm{ch}\, z$.

Definiţia 1.3.8. *Aplicaţia* $\mathrm{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\mathrm{sh}\ (z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \ z \in \mathbb{C},$$

se numeşte **funcţia sinus hiperbolic**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\mathrm{sh}\, z$.

Fie $z \in \mathbb{C}^*$ fixat. Ne propunem să rezolvăm ecuaţia

$$e^w = z.$$

Dacă $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi[$ iar $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se obţine sistemul

$$\begin{cases} e^u \cos v = x \\ e^u \sin v = y \end{cases}.$$

Pentru $v \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ prin împărţirea relaţiilor găsim $\operatorname{tg} v = y/x$, de unde $v = \operatorname{arctg}(y/x) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Astfel

$$v = \arg z + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pe de altă parte $e^{2u} = x^2 + y^2$, de unde $e^u = |z|$ sau $u = \ln|z|$. Cazurile particulare $x = 0$, $y > 0$ şi $x = 0$, $y < 0$ duc la $v = \pi/2$ respectiv $v = 3\pi/2$.

Astfel s-a obţinut mulţmea soluţiilor

$$\{\ln|z| + \arg z + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se notează prin $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ familia părţilor (submulţimilor) lui $\mathbb{C}$. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă. O funcţie $F : D \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ se numeşte **funcţie complexă multivocă**.

Definiţia 1.3.9. *Aplicaţia* $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *dată de*

$$\mathrm{Ln}\,(z) = \{\ln|z| + i\arg z + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\},$$

se numeşte **funcţie logaritmică**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\mathrm{Ln}\, z$. *Aplicaţia* $\ln : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg z,$$

se numeşte ramura principală a funcţiei Ln *(pentru* $k = 0$*).*

Definiţia 1.3.10. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Aplicaţia* $z \in \mathbb{C}^* \longmapsto z^\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *dată de*

$$z^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,(z)},$$

se numeşte **funcţia putere**.

Fie $z \in \mathbb{C}$ fixat. Ne propunem să rezolvăm ecuaţia

$$\sin w = z.$$

Se obţine $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$. Notăm $e^{iw} = u$ astfel, din ecuaţia de gradul doi găsim rădăcinile $u_1 = iz - \sqrt{1 - z^2}$, respectiv $u_2 = iz + \sqrt{1 - z^2}$. De aici $iw = \mathrm{Ln}\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$ sau $w = -i\,\mathrm{Ln}\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$. Cum $u_1 u_2 = -1$ avem $w_1 + w_2 = i\pi$.

Astfel s-a obţinut mulţimea soluţiilor $-i\,\mathrm{Ln}\,(iz - \sqrt{1 - z^2})$.

Definiţia 1.3.11. *Aplicaţia* $\mathrm{Arcsin} : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *dată de*

$$\mathrm{Arcsin}\,(z) = -i\,\mathrm{Ln}\,(iz - \sqrt{1 - z^2}),$$

se numeşte **funcţia arcsinus**. *Valorile funcţiei se vor nota* $\mathrm{Arcsin}\, z$.

Exemple

1. Să calculăm $\mathrm{Ln}\,(-1+i\sqrt{3})$. Avem $|-1+i\sqrt{3}|=2$ şi $\arg(-1+i\sqrt{3})=2\pi/3$, astfel că $\mathrm{Ln}\,(-1+i\sqrt{3})=\ln 2+i(2\pi/3+k\pi); k\in\mathbb{Z}$.

   Avem $\ln(i)=i\cdot\pi/2$, $\ln(-1)=i\cdot\pi$, $\ln(1+i\sqrt{3})=\ln 2+i\cdot\pi/3$.

2. Să calculăm $(-1)^{-1}$. Avem $(-1)^{-1}=e^{\mathrm{Ln}\,(-1)^{-1}}=e^{(-1)\,\mathrm{Ln}\,(-1)}$. Dar $\mathrm{Ln}\,(-1)=\ln 1+i(\pi+k\pi); k\in\mathbb{Z}$. De aici $(-1)^{-1}=e^{-i(\pi+k\pi)}=\cos(\pi+k\pi)-i\sin(\pi+k\pi)=(-1)^{k+1}=\{-1;+1\}$.

3. Să calculăm $\sin(\pi+i\ln 7)$. Aplicând formula găsim $\sin(\pi+i\ln 7)=1/(2i)[e^{i\pi}e^{-\ln 7}-e^{-i\pi}e^{\ln 7}]=1/(2i)(-1/7+7)=-24i/7$.

Exerciţii

1) Să se calculeze:

a) $\mathrm{Ln}\,(1+i)$; b) $\mathrm{Ln}\,(1-i)$; c) i^{i^i}; d) $(-4)^{-2}$;
e) $(1+i)^{1+i}$; f) $i^{\mathrm{Ln}\,i}$; g) $\sin(\pi/2+i\ln 2)$; h) $\mathrm{ch}\,(i\frac{\pi}{2})$;
i) $\mathrm{Arcsin}\,(1+i)$; j) $\mathrm{Arcsin}\,\sqrt{3}$.

2) Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^6+(i+1)z^3+i=0$; b) $z^{16}+2iz^8-2=0$; c) $e^{2z^4}+e^{z^4}=-1+i$;
d) $\sin z^2=i$; e) $\cos^2 z^3=-1$; f) $e^{z^{12}}=1+i$.

3) Fie $U=U(0;1)$. Să se arate că funcţia $d_h:U\times U\to\mathbb{R}$, dată de

$$d_h(z_1,z_2)=\frac{1}{2}[\ln(1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|)-\ln(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|)],$$

este o metrică (**metrica hiperbolică**, a se vedea [5]).

4) Să se arate că $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$.

Ind. 1) a) $\mathrm{Ln}\,(1+i)=\ln 2/2+i(\pi/4+k\pi); k\in\mathbb{Z}$; 2) a) $z^3=u$; $u_1=i$, $u_2=1$; c) $e^{z^4}=u$; $z^4=\mathrm{Ln}\,u$; e) $\cos z^3=-i$, $\cos z^3=i$; $z^3=\mathrm{Arccos}\,(-i)$, $z^3=\mathrm{Arccos}\,i$; 3) se poate folosi monotonia funcţiei $r:(0,1)\to\mathbb{R}$, $r(x)=(1+x)/(1-x)$; 4) fie $z_n=x_n+iy_n$, $x_n,y_n\in\mathbb{R}$; se calculează $\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\frac{\sin(x_n+iy_n)}{x_n+iy_n}$.

1.4 Imaginea reţelei carteziene prin unele funcţii complexe elementare

Aşa cum în clasa a XI-a se studiază variaţia funcţiilor reale parcurgând un anume algoritm (domeniu de definiţie, intersecţie cu axele de coordonate, limite, asimptote, continuitate, derivabilitate, puncte semnificative de pe grafic, tabel de variaţie şi în sfârşit graficul funcţiei) un prim pas în studiul funcţiilor complexe îl poate reprezenta imaginea reţelei carteziene prin câteva funcţii.

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă. O aplicaţie $f : D \to \mathbb{C}$, prin care $z \in D \longmapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$ se numeşte **funcţie complexă**.

În această secţiune vom determina imaginea prin unele funcţii elementare a mulţimilor de forma

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}, a \in \mathbb{R} \text{ şi } B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = b\}, b \in \mathbb{R}.$$

Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Pentru $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$$

cu $u = \operatorname{Re} f = x^2 - y^2$ iar $v = \operatorname{Im} f = 2xy$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = a^2 - y^2$ şi $v = 2ay$. Eliminăm variabila y. Pentru $a \neq 0$ avem $y = v/(2a)$ de unde găsim curba

$$u = a^2 - v^2/(4a^2)$$

reprezentând o parabolă (fig. 1.1). Dacă $a = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = -y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Analog pentru mulţimea B. Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde

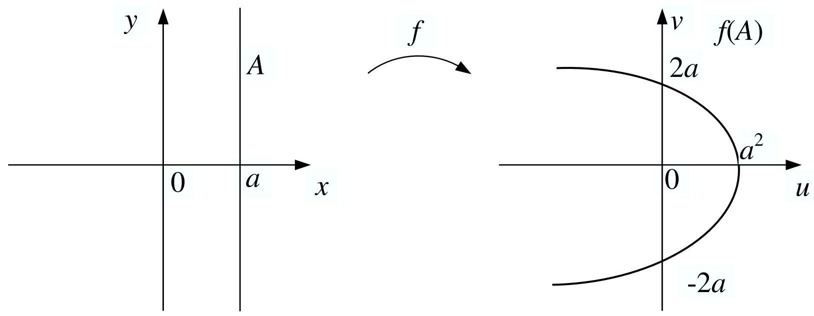

Figura 1.1: $f(z) = z^2$

$u = x^2 - b^2$ şi $v = 2xb$. Eliminăm variabila x. Pentru $b \neq 0$ avem $x = v/(2b)$ de unde găsim curba (locul geometric dat de perechea (u, v))

$$u = v^2/(4b^2) - b^2$$

reprezentând o parabolă (fig. 1.2). Dacă $b = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

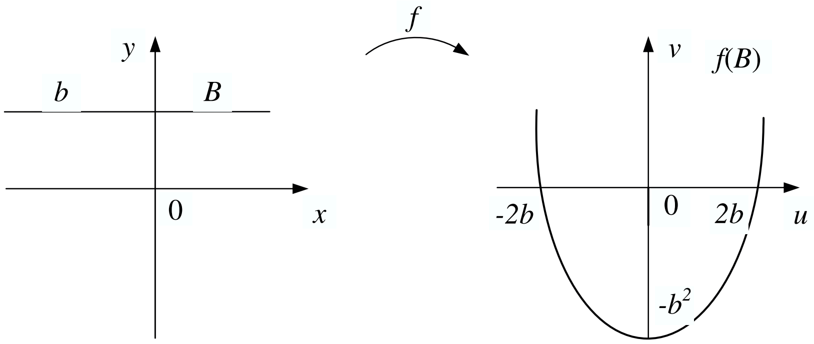

Figura 1.2: $f(z) = z^2$

Dreptele reprezentate prin mulţimile A şi B sunt perpendiculare. Uşor se poate observa că tangentele în punctul de intersecţie a două parabole $f(A)$ şi $f(B)$ sunt tangente. O funcţie care păstrează unghiurile dintre două curbe se numeşte **conformă**.

Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$. Pentru $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$w = f(z) = x/(x^2 + y^2) - yi/(x^2 + y^2) = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$$

cu $u = \operatorname{Re} f = x/(x^2 + y^2)$ iar $v = \operatorname{Im} f = -y/(x^2 + y^2)$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = a/(a^2 + y^2)$ şi $v = -y/(a^2 + y^2)$. Eliminăm variabila y. Pentru $a \neq 0$ avem $v/u = -y/a$ de unde găsim curba

$$u^2 + v^2 = u/a$$

reprezentând cercul de centru $(1/(2a), 0)$ şi rază $1/(2a)$ (fig. 1.3). Dacă $a = 0$ atunci $u = 0$ şi $v = -1/y$, $y \in \mathbb{R}^*$.

Analog pentru mulţimea B. Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = x/(x^2 + b^2)$ şi $v = -b/(x^2 + b^2)$. Pentru $b \neq 0$ găsim $u/v = -x/b$. Eliminăm variabila x şi avem curba

$$u^2 + v^2 = v/b$$

reprezentând cercul de centru $(0, 1/(2b))$ şi rază $1/(2b)$ (fig. 1.4). Dacă $b = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = -1/x$, $x \in \mathbb{R}^*$.

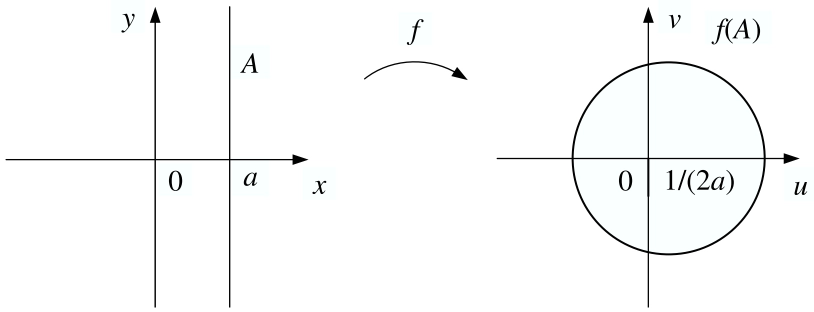

Figura 1.3: $f(z) = 1/z$

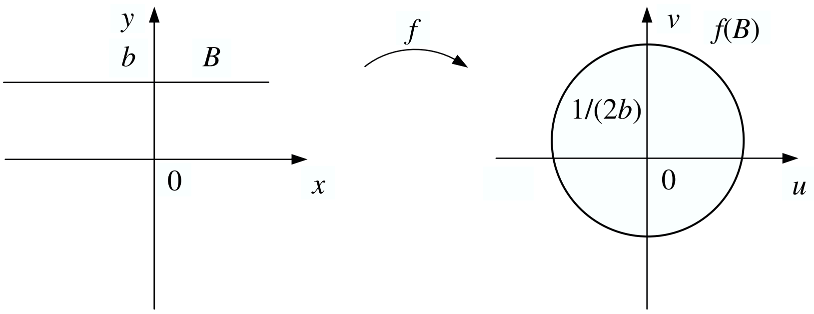

Figura 1.4: $f(z) = 1/z$

Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Pentru $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$w = f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$$

cu $u = \operatorname{Re} f = e^x \cos y$ iar $v = \operatorname{Im} f = e^x \sin y$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = e^a \cos y$ şi $v = e^a \sin y$. Eliminăm variabila y de unde găsim curba

$$u^2 + v^2 = e^{2a}.$$

reprezentând cercul cu centru în origine şi rază e^a (fig. 1.5).

Analog pentru mulţimea B. Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = e^x \cos b$ şi $v = e^x \sin b$. Eliminăm variabila x. Pentru $b \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ avem $v/u = \operatorname{tg} b$ reprezentând drepte care trec prin origine având panta b (fig. 1.6). Dacă $b \in \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ atunci $u = 0$ şi $v = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, pentru k par, respectiv $v = -e^x$, $x \in \mathbb{R}$, pentru k impar.

Exerciţii

1) Să se determine imaginea mulţimii $A = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 1\}$ prin funcţia $f(z) = z^2 + z + 1$.

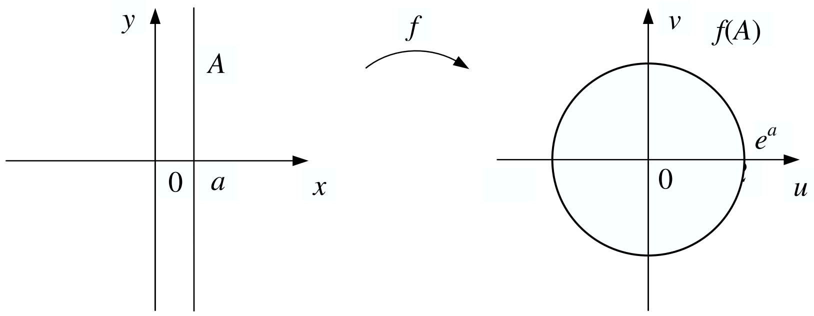

Figura 1.5: $f(z) = e^z$

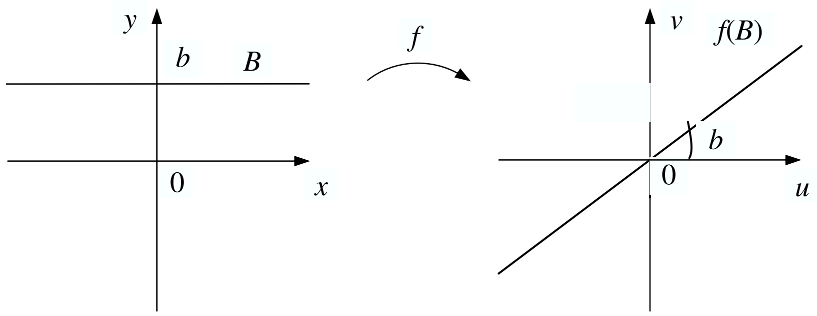

Figura 1.6: $f(z) = e^z$

2) Să se determine imaginea mulţimii $B = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z = 1\}$ prin funcţia $f(z) = z^2 - z$.

3) Să se determine imaginea funcţiei $w = f(z) = z^2$ prin mulţimile

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_0 > 0\}, r_0 \text{ fixat}$$

şi

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \alpha_0\}, \alpha_0 \text{ fixat} .$$

4) Să se determine imaginea funcţiei $w = f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, prin mulţimile de la exerciţiul precedent.

5) Să se determine imaginea mulţimii $S = [0, i]$ prin funcţia $f(z) = e^{z^2}$.

6) Se consideră funcţia $J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $J(z) = (z + 1/z)/2$. Dacă $w = J(z)$ să se arate că $\dfrac{w-1}{w+1} = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$. Folosind scrierea în formă trigonometrică a lui z să se determine $\operatorname{Re} J$ şi $\operatorname{Im} J$. Să se determine apoi imaginea mulţimilor

a) $\partial U(0;1)$; b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, 1 \leq \operatorname{Im} z < \infty\}$; c) $\partial U(0;r_0), r_0 > 0$, fixat;
d) $U(0;1)$; e) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\}$;
f) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta_0\}, \theta_0 > 0$, fixat.

Răspunsuri: 1) parabolă; 2) parabolă; 3) cerc; dreaptă; 3) cerc; dreaptă; 5) 6).

1.5 Funcţii omografice

Definiţia 1.5.1. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $c \neq 0$ şi $ad - bc \neq 0$. Punctul $-d/c$ se numeşte* **pol**. *Aplicaţia $h : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}$ dată de*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \ z \neq -d/c,$$

se numeşte **funcţie omografică**.

Funcţia omografică se poate extinde astfel $\tilde{h} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, prin $\tilde{h}(z) = h(z)$, pentru $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ şi $\tilde{h}(-d/c) = \infty$, $\tilde{h}(\infty) = a/c$.

Definiţia 1.5.2. *Fie $A, C \in \mathbb{R}$ şi $B \in \mathbb{C}$. Mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ pentru care*

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

se numeşte **cerc în sens larg**.

Dacă $A = 0$ cercul în sens larg se transormă într-o dreaptă (cerc cu rază infinită) iar pentru $A \neq 0$ cercul în sens larg se transormă într-un cerc propriu-zis (cerc cu rază finită).

Vom enumera câteva proprietăţi ale funcţiilor omografice.

Propoziţia 1.5.1. *Funcţiile omografice transformă cercurile în sens larg în cercuri în sens larg.*

Demonstraţie. Fie $w = h(z)$ cu $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$. Prin înlocuirea lui $z = \dfrac{-dw + b}{cw - a}$ se obţine $A_1 z\bar{z} + B_1 z + \bar{B}_1 \bar{z} + C_1 = 0$, cu $A_1, C_1 \in \mathbb{R}$ şi $B_1 \in \mathbb{C}$. □

Mai exact infinitul nu se poate afla pe niciun cerc propriu-zis. Cum $h(z_0) = \infty$ ($z_0 = -d/c$ fiind polul) avem un criteriu clar de stabilire a imaginii unui cerc în sens larg. Dacă acesta conţine polul imaginea sa va fi o dreaptă în caz contrar va

fi un cerc propriu-zis. Există situaţii când se cere imaginea unui arc de cerc, a unei semidrepte sau a unui segment. În toate aceste situaţii se va considera cercul de suport, respectiv dreapta de suport pentru a aplica criteriul mai sus menţionat.

Propoziţia 1.5.2. *Funcţiile omografice pentru care $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ transformă axa reală în axa reală. Reciproc dacă funcţiile omografice transformă axa reală în axa reală atunci $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ atunci evident $h(z) \in \mathbb{R}$ pentru orice $z \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.
Reciproc, se impune ca $h(x) = \overline{h(x)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. □

Propoziţia 1.5.3. *Funcţiile omografice pentru care $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc > 0$ transformă semiplanul superior în semiplanul superior. Reciproc dacă funcţiile omografice transformă semiplanul superior în semiplanul superior atunci $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc > 0$.*

Demonstraţie. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $\operatorname{Im} z = y > 0$. Avem $\operatorname{Im} h(z) = [ay(cx + d) - cy(ax + b)]/[(cx + d)^2 + y^2] > 0$. Reciproc, folosind propoziţia 1.5.2 şi dacă se impune $\operatorname{Im} h(i) > 0$ găsim $ad - bc > 0$. □

Propoziţia 1.5.4. *Funcţiile omografice de forma $h(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $|z_0| < 1$ transformă discul unitate în discul unitate. Reciproc, dacă funcţiile omografice transformă discul unitate în discul unitate atunci sunt de forma*

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \ \theta \in \mathbb{R}, \ |z_0| < 1.$$

Demonstraţie. Fie $w = h(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $|z_0| < 1$. Este uşor de arătat că din $|z| \leq 1$ avem $|w| \leq 1$.

Reciproc, fie $w = h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Pentru început impunem ca din $z\bar{z} = 1$ să avem $w\bar{w} = 1$. Găsim

$$|a|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} + |b|^2 = |c|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2, \text{ pentru orice } z \text{ cu } |z| = 1.$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0 \\ a\bar{b} = c\bar{d}. \end{cases}$$

Dacă $a = 0$ atunci $d = 0$ şi $|b| = |c|$, astfel că $w = \dfrac{b}{cz}$ de unde $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ ceea ce duce la contradicţie, întrucât $|z| < 1$ implică $|w| > 1$. Rămâne $a \neq 0$ şi $d \neq 0$. Avem

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{\bar{b}}{\bar{d}}$ valoare comună ce o vom nota $\bar{\lambda}$. Atunci $c = a\bar{\lambda}$ şi $b = \lambda d$. Înlocuind în prima egalitate a sistemului găsim $(1 - |\lambda|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Dacă $|\lambda| = 1$ adică $\bar{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$, atunci forma funcţiei $w = \dfrac{az + \lambda d}{az\bar{\lambda} + d} = \lambda$ duce le contradicţie (am avea $|w| = |\lambda| = 1$, pentru orice $|z| \leq 1$). Rămâne $|\lambda| \neq 1$ şi $|a| = |d|$. Există atunci $\theta \in \mathbb{R}$ încât $\dfrac{a}{d} = e^{i\theta}$. Din bijectivitatea funcţiei h există z_0 cu $|z_0| < 1$ încât $w = h(z_0) = 0$. Evident $z_0 = -\lambda\dfrac{d}{a}$. Am găsit astfel forma funcţiei

$$h(z) = \frac{a}{d}\frac{z + \lambda\frac{d}{a}}{\frac{a}{d}\bar{\lambda}z + 1} = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}.$$

$\square$

Propoziţia 1.5.5. *Funcţiile omografice de forma* $h(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ *transformă semiplanul superior în discul unitate. Reciproc, dacă funcţiile omografice transformă semiplanul superior în discul unitate atunci sunt de forma*

$$h(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} z_0 > 0.$$

Demonstraţie. Fie $w = h(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Este uşor de arătat că din $\operatorname{Im} z \geq 0$ avem $|w| \leq 1$.

Reciproc, fie $w = h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Pentru început impunem ca din $\operatorname{Im} z = 0$ să avem $w\bar{w} = 1$. Găsim

$$|a|^2x^2 + a\bar{b}x + \bar{a}bx + |b|^2 = |c|^2x^2 + c\bar{d}x + \bar{c}dx + |d|^2,\ \text{pentru orice } x = \operatorname{Re} z.$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} |a| = |c| \\ |b| = |d| \\ \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(c\bar{d}). \end{cases}$$

Dacă $a = 0$ atunci $c = 0$, imposibil. Din bijectivitatea funcţiei h există z_0 cu $\operatorname{Im} z_0 > 0$ încât $w = h(z_0) = 0$. Evident $z_0 = -\dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$. Mai mult există u_0 cu $\operatorname{Im} u_0 < 0$ încât $w = h(u_0) = \infty$. Evident $u_0 = -\dfrac{d}{c}$. Din prima egalitate a sistemului deducem existenţa unui $\alpha \in \mathbb{R}$ încât $\dfrac{a}{c} = e^{i\alpha}$. Am găsit astfel forma funcţiei

$$h(z) = \frac{a}{c}\frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - u_0}.$$

Rămâne de arătat că $u_0 = \bar{z}_0$. Din a doua egalitate a sistemului avem $|z_0| = |u_0|$. Condiţia $|w| \leq 1$, se scrie $|z - z_0| \leq |z - u_0|$, pentru orice z cu $\operatorname{Im} z \geq 0$. Punând $z = 1$ şi apoi $z = -1$ se deduce $\operatorname{Re} z_0 \leq \operatorname{Re} u_0$, respectiv $\operatorname{Re} z_0 \geq \operatorname{Re} u_0$. $\square$

Exemple

1. Fie $h(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$. Să determinăm imaginea axelor prin h.

   Polul transformării este $z_0 = 1$. Întrucât polul se află pe axa absciselor aceasta se va transforma într-o dreaptă. Alegem *două* valori, spre exemplu $z_1 = 0$ şi $z_2 = 2$. Avem $h(0) = -i$ şi $h(2) = 2 + i$. Se putea alege şi $z_\infty = \infty$ cu $h(\infty) = \lim_{z\to\infty} h(z) = 1$. Imaginea axei absciselor prin h va fi atunci dreapta care trece prin punctele $A(-1)$ şi $B(2+i)$. Evident $1 \in AB$.

   Întrucât polul **nu** se află pe axa ordonatelor aceasta se va transforma într-un cerc. Alegem *trei* valori $z_1 = 0$, $z_2' = i$ şi $z_3' = -i$. Avem $h(0) = -i$, $h(i) = 1-i$ şi $h(-i) = 0$. Se putea alege şi $z_\infty = \infty$ cu $h(\infty) = \lim_{z\to\infty} h(z) = 1$. Imaginea axei ordonatelor prin h va fi atunci cercul care trece prin punctele $A'(-i)$, $B'(1-i)$ şi $O(0)$. Evident $1 \in \overset{\frown}{A'B'O}$.

2. Fie $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ şi $h(z) = \dfrac{z}{z-i}$. Să determinăm $h(D)$.

   Frontiera domeniului D este compusă din $F_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (semicercul unitate din cadranele I şi IV) şi $F_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z = 0\}$ (segmentul de pe axa ordonatelor, adică $]-i, i[$). Altfel scris $\partial D = F_1 \cup F_2$.

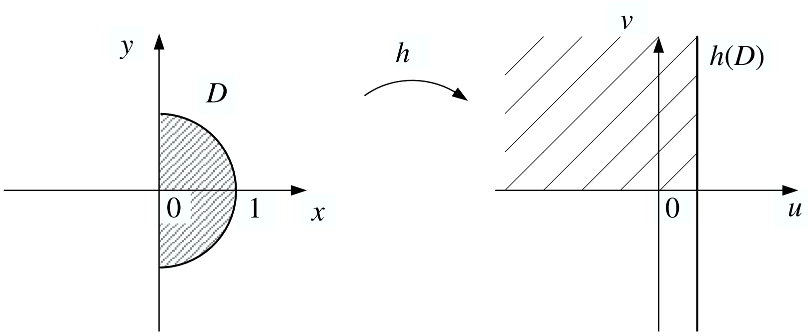

Figura 1.7: $h(D)$

Imaginea lui D prin h va fi atunci reuniunea imaginilor prin h a lui F_1 şi F_2. Polul transformării h (rădăcina numitorului) este $z_0 = i$. Polul se află atât pe suportul (cercul unitate) lui F_1 cât şi pe suportul (axa ordonatelor) segmentului F_2 astfel că $\infty \in h(F_1)$ şi $\infty \in h(F_2)$. Ambele mulţimi de suport

se vor tranforma atunci în drepte. Rămâne să determinăm ce porţiuni din aceste drepte reprezintă $h(F_1)$ şi $h(F_2)$. Pentru aceasta calculăm nişte valori într-un tabel. Avem $-i, 1, i \in F_1$ şi $h(-i), h(1), h(i) \in h(F_1)$. Apoi $0, i/2 \in F_2$ şi $h(0), h(i/2) \in h(F_2)$. Reprezentând toate aceste valori vom găsi $h(\partial D)$ (fig. 1.7). Rămâne să stabilim care dintre cele două domenii este $h(D)$ folosind proprietatea transformărilor omografice de *conservare a orientării domeniilor*. Spunem că un domeniu are **orientare pozitivă** dacă prin parcurgerea frontierei sale în sens trigonometric interiorul său este în partea stângă. Un domeniu orientat pozitiv se tranformă omografic într-un domeniu orientat pozitiv.

3. Să determinăm transformările omografice $w = h(z)$ pentru care

$$\operatorname{Re} z < 0 \overset{h}{\longmapsto} |w - i| < 2.$$

Vom folosi propoziţia 1.5.5. Prin substituţia $z_1 = -iz$ punctele pentru care $\operatorname{Re} z < 0$ se transformă în $\operatorname{Im} z_1 > 0$. Prin transformarea $w_1 = e^{i\alpha}\dfrac{z_1 - z_0}{z_1 - \bar{z}_0}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\operatorname{Im} z_0 > 0$ se obţine $|w_1| < 1$. Prin substituţia $w_1 = (w_2 - i)/2$ punctele pentru care $|w_1| < 1$ se transformă în $|w_2 - i| < 2$. Acum se exprimă w ca funcţie de z şi se obţine $w_2 = 2w_1 + i = 2e^{i\alpha}\dfrac{-iz - z_0}{-iz - \bar{z}_0} + i = 2e^{i\alpha}\dfrac{iz + z_0}{iz + \bar{z}_0} + i$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

Exerciţii

1) Fie $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ şi $h(z) = \dfrac{2z - 1}{2 + iz}$. Să se determine $h(D)$.

2) Fie $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \dfrac{3\pi}{2} < \arg z < 2\pi\}$ şi $h(z) = \dfrac{z - 1}{z - i}$. Să se determine $h(D)$.

3) Fie $h(z) = \dfrac{z + i}{z - 1}$. Să se determine imaginea celor patru cadrane prin h.

4) Să se determine transformările omografice care transformă discul unitate în semiplanul superior.

5) Să se determine transformările omografice $w = h(z)$ pentru care:

a) $\operatorname{Re} z > 0 \overset{h}{\longmapsto} |w - 1| < 1$; b) $|z - i| < 1 \overset{h}{\longmapsto} |w| < 2$;
c) $|z + i| < 1 \overset{h}{\longmapsto} |w + 1| < 1$; d) $|z - a| < b \overset{h}{\longmapsto} \operatorname{Im} w < 0; a, b \in \mathbb{R}, b > 0$.

Răspunsuri: 1) polul $z_0 = 2i$ se află pe prelungirea segmentului $[0, i]$; 2) polul $z_0 = i \in \partial D$; 4) se determină inversa funcţiei din propoziţia 1.5.5; 5) a) $e^{i\alpha}\frac{iz-z_0}{iz-\bar{z}_0} + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

Definiţia 1.5.3. *Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distincte. Valoarea*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} \in \mathbb{C}$$

*se numeşte **biraport** şi se notează (z_1, z_2, z_3, z_4).*

Se observă că prin permutări circulare avem $(z_4, z_1 z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3, z_4)^{-1}$ şi $(z_3, z_4, z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Biraportul se poate defini şi dacă unul dintre puncte este ∞. Spre exemplu, dacă $z_1 = \infty$ atunci fracţia în care apare z_1 se consideră $\lim\limits_{z \to z_1} \frac{z - z_2}{z - z_4} = 1$. Astfel $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$.

Propoziţia 1.5.6. *Funcţiile omografice conservă biraportul.*

Demonstraţie. Se verifică prin calcul că $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4))$. □

Capitolul 2

Derivabilitate

Derivabilitatea unei funcţii complexe de variabilă reală, în principiu este similară funcţiei vectoariale de variabilă reală. În cazul funcţiilor complexe (de variabilă complexă) există proprietăţi specifice. Teorema Cauchy-Riemann este un rezultat esenţial. Să mai menţionăm însă un aspect: fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Funcţia f este continuă pe $[-1, 1]$ şi derivabilă pe $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Pentru funcţii complexe poate părea surprinzător următoarul rezultat: fie $g : U(0, 1) \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe $U(0, 1)$ şi derivabilă pe $U(0, 1) \setminus \{0\}$. Atunci g este derivabilă în $z_0 = 0$!

2.1 Funcţii complexe derivabile

Definiţia 2.1.1. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ nevidă şi $t_0 \in I$. Funcţia $r : I \to \mathbb{C}$ se numeşte* **derivabilă** *în t_0 dacă există limita şi*

$$r'(t_0) \overset{not}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Dacă se scrie $r(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in I$, încât $u, v : I \to \mathbb{R}$ atunci este de remarcat că r este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă u şi v sunt derivabile în t_0 şi $r'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$.

Exemple

1. Fie $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ şi $r : [0, 1] \to [z_0, z_1]$, $r(t) = (1 - t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$. Avem $r'(t) = z_1 - z_0$, $t \in [0, 1]$.

2. Fie $r : [0,1] \to \mathbb{C}$, $r(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Avem $r'(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

3. Fie $r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r(t) = (t+i)^2 + e^t i$, $t \in \mathbb{R}$. Avem $r'(t) = 2(t+i) + e^t i$, $t \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.2. *Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ nevidă şi $z_0 \in G$. Funcţia $f : G \to \mathbb{C}$ se numeşte* **derivabilă** *în $z_0 \in G$ dacă există limita şi*

$$f'(z_0) \overset{not}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ şi $z_0 \in \mathbb{C}$ oarecare. Avem $f'(z_0) = 2z_0$. Regula de calcul a derivatelor funcţiilor polinomiale reale se păstrează pentru funcţiile polinomiale complexe.

Definiţia 2.1.3. *Fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$. Aplicaţia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte K-***liniară** *dacă*

$$T(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha T(z_1) + \beta T(z_2), \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in K, z_1 z_2 \in \mathbb{C}.$$

În mod evident orice aplicaţie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care este $\mathbb{C}$-liniară este la rândul ei $\mathbb{R}-$liniară. Reciproc nu este adevărat. Dacă se consideră aplicaţia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \operatorname{Re} z$ aceasta este $\mathbb{R}-$liniară dar nu este $\mathbb{C}-$liniară întrucât $T(i \cdot 1) \neq i \cdot T(1)$. Mai mult, pentru $a, b \in \mathbb{C}$ o aplicaţie de forma $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z$ este $\mathbb{R}-$liniară. Aceeaşi aplicaţie este şi $\mathbb{C}-$liniară dacă şi numai dacă $b = ai$.

Propoziţia 2.1.1. *Aplicaţia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-liniară dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ încât $T(z) = \alpha z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Dacă $T(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$ atunci se verifică elementar relaţia

$$T(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2) = \beta_1 T(z_1) + \beta_2 T(z_2), \text{ pentru orice } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 \in \mathbb{C}.$$

Reciproc, din aditivitate avem $T(0) = 0$. Apoi alegând $z_2 = 0$ găsim $T(\beta z) = \beta T(z)$, pentru orice $\beta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Punem $z = 1$ de unde $T(\beta) = \beta T(1)$. Se alege $\alpha := T(1)$. □

Se urmăreşte analogia cu următoarea afirmaţie: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă există o aplicaţie $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liniară încât

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - R(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Aplicaţia $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este liniară dacă şi numai dacă există $d \in \mathbb{R}$ încât $R(x) = dx$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Desigur, $d = f'(x_0)$.

O aplicaţie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este $\mathbb{R}$-liniară dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{C}$ încât $T(z) = az + b\bar{z}$.

Definiţia 2.1.4. *Fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$. O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ se numeşte K-**diferenţiabilă** în z_0 dacă există o aplicaţie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care să fie K-liniară şi*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0. \tag{2.1}$$

În definiţia de mai sus sunt conţinute ambele noţiuni atât cea de $\mathbb{R}$-diferenţiabilitate cât şi cea de $\mathbb{C}$-diferenţiabilitate. Legătura dintre ele este dată de relaţia între $\mathbb{R}$-liniaritate şi $\mathbb{C}$-liniaritate. Evident atunci, dacă o funcţie este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 atunci este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0. În ce condiţii are loc şi reciproca ?

Propoziţia 2.1.2. *Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f : G \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in G$. Atunci f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 dacă şi numai dacă există o aplicaţie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ care să fie $\mathbb{C}$-liniară şi o funcţie $g : G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 cu $g(z_0) = 0$ astfel încât*

$$f(z) = f(z_0) + T(z - z_0) + g(z) \cdot |z - z_0|, \text{ pentru orice } z \in G. \tag{2.2}$$

Demonstraţie. Presupunem că f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0. Existenţa aplicaţie $\mathbb{C}$-liniare $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este asigurată din definiţie. Funcţia $g : G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 se construieşte în mod natural astfel: $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)}{|z - z_0|}, & \text{dacă } z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0, & \text{dacă } z = z_0. \end{cases}$

Reciproc, din existenţa aplicaţie $\mathbb{C}$-liniare, $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi a funcţiei $g : G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 pentru care să aibă loc relaţia (2.2) trebuie arătat că are loc (2.1). Aceasta se poate deduce cu uşurinţă (a se vedea exerciţiul 4 secţiunea 1.2). □

Din demonstraţia propoziţiei precedente se poate deduce echivalenţa dintre noţiunea de derivabilitate în z_0 şi $\mathbb{C}$-diferenţiabilitate în z_0 a unei funcţii complexe. Aplicaţia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-liniară are forma $T(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)z$.

Definiţia 2.1.5. *Fie $G \subseteq \mathbb{C}$. O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ derivabilă în orice punct din G se va numi **olomorfă** pe G.*

2.2 Teorema Cauchy-Riemann

Funcţia f admite derivate parţiale în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă u şi v admit derivate parţiale în (x_0, y_0) şi au loc egalităţile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Simbolic avem $f_x = u_x + iv_x$ şi $f_y = u_y + iv_y$.

Se consideră următoarele notaţii:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right].$$

Simbolic avem $f_z = (f_x - if_y)/2$ şi $f_{\bar{z}} = (f_x + if_y)/2$. Se obţin astfel relaţiile

$$f_x = f_z + f_{\bar{z}} \text{ şi } f_y = (f_z - f_{\bar{z}})i.$$

Teorema 2.2.1. (Cauchy-Riemann) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este derivabilă în* $z_0 \in \mathbb{C}$ *dacă şi numai dacă* f *este* $\mathbb{R}$*-diferenţiabilă în* z_0 *şi* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Demonstraţie. Presupunând că f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0 avem $g : G \to \mathbb{C}$ continuă în z_0 cu $g(z_0) = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + g(z) \cdot |z - z_0|, \tag{2.3}$$

pentru orice $z \in G$. Alegem $z = (x, y_0) \in G$. Prin trecere la limită $z \to z_0$ avem $x \to x_0$ astfel că $a = f_x$. Alegând $z = (x_0, y) \in G$, prin trecere la limită $z \to z_0$ avem $y \to y_0$ astfel că $b = f_y$. Condiţia $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ sau $f_x + if_y = 0$ duce la $b = ai$, deci f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă.

Reciproc, dacă f este derivabilă în z_0 atunci este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în z_0 şi implicit $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0. Mai mult din identitatea

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0),\ z = x + iy$$

găsim $b = ai$, deci $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. $\square$

Condiţia $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ revine la sistemul $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$ Derivata unei funcţii complexe este dată de $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = exp(z) = e^z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Avem
$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i \sin y))(z_0) = e^x(\cos y + i \sin y)\Big|_{z=z_0} = f(z_0),$$
pentru orice $z_0 \in \mathbb{C}$.

   Cu alte cuvinte $(e^z)' = e^z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

   Pentru funcţia sinus avem $(\sin z)' = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = (e^{iz} + e^{-iz})/2 = \cos z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Analog $(\cos z)' = -\sin z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Mai mult $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$ şi $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$. Funcţiile exp, sh şi ch sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$.

2. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \operatorname{Im} z$. Avem $u = \operatorname{Re} f = x^2 - y^2 + y$ şi $v = \operatorname{Im} f = 2xy$. Condiţiile Cauchy-Riemann devin $\begin{cases} 2x = 2x \\ -2y + 1 = -2y. \end{cases}$ Sistemul neavând soluţie funcţia nu este derivabilă în niciun punct.

3. Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \operatorname{Im} z^2$. Avem $u = \operatorname{Re} f = x^2 - y^2 + 2xy$ şi $v = \operatorname{Im} f = 2xy$. Condiţiile Cauchy-Riemann devin $\begin{cases} 2x + 2y = 2x \\ -2y + 2x = -2y \end{cases}$ cu soluţia $(x, y) = (0, 0)$, funcţia este derivabilă (numai) în punctul $z_0 = 0$.

Exerciţii

1) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 2z + 3\bar{z}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ este bijectivă. Să se arate că este $\mathbb{R}-$liniară dar nu este $\mathbb{C}-$liniară.

2) Să se arate că în coordonate polare (r, θ), condiţiile Cauchy-Riemann se scriu astfel $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$ În plus derivata se calculează după formula
$$f'(z_0) = \frac{r_0}{z_0}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right)\Bigg|_{z=z_0}.$$

3) Pentru funcţiile:

   a) $f(z) = 7z + 19\bar{z}$; b) $f(z) = z^2 - \bar{z}$; c) $f(z) = z^3\bar{z}$;
   d) $f(z) = 7\bar{z}$; e) $f(z) = \operatorname{Re} z^2$; f) $f(z) = |z^2| \operatorname{Im} z$,

să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, unde $u = \operatorname{Re} f$ iar $v = \operatorname{Im} f$.

4) Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 2ax + y + i(7bx - 19y)$, pentru orice $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ încât $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

5) Pentru funcţiile:

a) $f(z) = e^z$; b) $f(z) = \sin z$; c) $f(z) = \cos z$; d) $f(z) = \operatorname{sh} z$,

să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ unde $u = \operatorname{Re} f$ iar $v = \operatorname{Im} f$.

6) Folosind definiţia să se calculeze $f'(z)$ pentru $f(z) = z^7 + 7iz$ şi $f(z) = z^3 + 7\cos z$.

7) Să se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile să fie derivabile pe $\mathbb{C}$:

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$; b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$;
c) $f(z) = ay + b \sin x \operatorname{ch} y + i(cx + d \cos x \operatorname{sh} y)$;
d) $f(z) = \cos x(a \operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) + i \sin x(c \operatorname{ch} y + d \operatorname{sh} y)$.

Răspunsuri: 2) se foloseşte derivata funcţiilor compuse $\partial u/\partial r = \partial u/\partial x \cdot \partial x/\partial r + \partial u/\partial y \cdot \partial y/\partial r$; 7) a) $c = 1$, $b = -a$, $f(z) = (1 - ia)z$; b) $a = d = 2$, $b = c = -1$, $f(z) = (1 - i)z^2$; c) $c = -a$, $d = -b$, $f(z) = aiz - ib\cos z$; d) $c = -b$, $d = -a$, $f(z) = a\cos z - bi\sin z$.

Capitolul 3

Integrabilitate

Integrala complexă se va defini ca un caz particular al integralei Riemann - Stieltjes (a se vedea [1]). Mai exact se va integra o funcţie continuă în raport cu o funcţie cu variaţie mărginită.

Din teoria integralei Riemann - Stieltjes reamintim câteva rezultate. Fie $u_1, u_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă u_1 este integrabilă (RS) în raport cu u_2 atunci şi u_2 este integrabilă (RS) în raport cu u_1 şi are loc formula de integrare prin părţi

$$\int_a^b u_1 du_2 + \int_a^b u_2 du_1 = u_1 u_2 \Big|_a^b .$$

Câteva criterii suficiente de integrabilitate (RS) sunt următoarele. Dacă u_1 este integrabilă Riemann şi u_2 este lipshitziană atunci u_1 este integrabilă (RS) în raport cu u_2. Dacă u_1 este continuă şi u_2 este monotonă atunci u_1 este integrabilă (RS) în raport cu u_2. Dacă u_1 este continuă şi u_2 este cu variaţie mărginită atunci u_1 este integrabilă (RS) în raport cu u_2.

3.1 Integrala Riemann - Stieltjes a unei funcţii complexe de variabilă reală

Definiţia 3.1.1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ cu $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ iar $p = \operatorname{Re} g$, $q = \operatorname{Im} g$. Spunem că f este* **integrabilă Riemann - Stieltjes în raport cu g** *dacă $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann - Stieltjes în raport cu funcţiile*

$p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Valoarea integralei este numărul comlex definit astfel*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b u\,dp - \int_a^b v\,dq + i(\int_a^b u\,dq + \int_a^b v\,dp).$$

Propoziţia 3.1.1. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$. *Dacă* f *este continuă şi* g *este derivabilă atunci* f *este integrabilă Riemann - Stieltjes în raport cu* g *şi*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt.$$

Exemple

1. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{2\pi it}$, $g(t) = e^{\pi/2it}$. Avem

$$\int_0^1 f\,dg = \pi/2 \int_0^1 e^{2\pi it} e^{\pi/2it}\,dt = -i/5 e^{5\pi/2it}|_0^1 = -i(i-1)/5 = (1+i)/5.$$

2. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{2\pi it}$, $g(t) = 1 - t + t(2 + i)$. Avem

$$\int_0^1 f\,dg = (1+i) \int_0^1 e^{2\pi it}\,dt = 0.$$

Exerciţii

1) Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{\pi it}$, $g(t) = (1 - t)i + t(2 - i)$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f\,dg$.

2) Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f(t) = t^2 + it$, $g(t) = e^{\pi it}$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f\,dg$.

3) Fie $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $f(t) = t^3 + it$, $g(t) = \sin(\pi it)$. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^1 f\,dg$.

Răspunsuri: 1) $(1 + i)/\pi$; 2); 3) 0.

3.2 Drumuri

În scopul pregătirii integralei complexe sunt necesare următoarele noţiuni.

Definiţia 3.2.1. *O funcţie* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *continuă pe* $[0, 1]$ *se numeşte* ***drum****. Dacă în plus* γ *este şi derivabilă atunci se numeşte* ***drum neted****.*

Imaginea unui drum, $\gamma([0,1])$ se va nota (γ). Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. În mod frecvent apar drumurile

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2, \text{ cu } (\gamma) = [z_1, z_2]$$

şi

$$\gamma_r : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = re^{2\pi i t}, \text{ cu } (\gamma_r) = \partial U(0,r).$$

Definiţia 3.2.2. *Un drum $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ se numeşte* ***drum rectificabil*** *dacă γ este cu variaţie mărginită.*

Definiţia 3.2.3. *Un drum $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ se numeşte* ***drum poligonal*** *dacă există $\Delta = (0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1)$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ încât $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ să fie un segment.*

Un drum γ se numeşte **închis** dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$. Un drum închis rectificabil se numeşte **contur**.

Dacă $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ este un drum atunci drumul $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$ se numeşte **inversul** lui γ.

3.3 Integrala complexă

Definiţia 3.3.1. *Fie γ un drum rectificabil, $f : (\gamma) \to \mathbb{C}$ continuă. Integrala complexă a lui f de-a lungul drumul γ se notează $\int_\gamma f$ sau $\int_\gamma f(z)\,dz$ şi se defineşte prin integrala Riemann - Stieltjes a lui $f \circ \gamma$ în raport cu γ:*

$$\int_0^1 f \circ \gamma \, d\gamma.$$

Dacă $\gamma(t) = t, t \in [0,1]$ atunci integrala complexă se reduce la integrala Riemann.

Definiţia 3.3.2. *Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi $f : G \to \mathbb{C}$. Dacă există $F : G \to \mathbb{C}$ astfel încât*

a) *F să fie derivabilă pe G;*

b) *$F' = f$,*

atunci spunem că F este o primitivă a lui f.

Teorema 3.3.1. (*de legătură între primitivă şi integrală; de tip Leibniz-Newton*) *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : G \to \mathbb{C}$ continuă pe D. Atunci sunt adevărate afirmaţiile:*

a) *Dacă pentru orice contur γ cu $(\gamma) \subset D$ avem $\int_\gamma f = 0$ atunci f are primitivă pe D;*

b) *Dacă f are o primitivă F pe D atunci*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

În plus pentru γ contur avem $\int_\gamma f = 0$.

Demonstraţie. a) Fie $z_1 \in D$ fixat. Pentru orice $z \in D$ considerăm γ_z un drum poligonal de la z_1 la z. Definim $F : D \to \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{\gamma_z} f$. Arătăm $F'(z_0) = f(z_0)$, pentru orice $z_0 \in D$. Se notează $\lambda = [z_0, z_1]$ şi γ_{z_0} un drum poligonal de la z_1 la z_0 şi $\gamma = \gamma_z \cup \bar{\lambda} \cup \bar{\gamma}_{z_0}$. γ este un contur. Avem

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_z} f - \int_\lambda f - \int_{\gamma_{z_0}} f = F(z) - F(z_0) - \int_\lambda f,$$

de unde

$$F(z) - F(z_0) = \int_\lambda f = (z - z_0) \int_0^1 [f((1-t)z_0 + tz)]\, dt$$

adică

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 [f((1-t)z_0 + tz)]\, dt,$$

astfel că din continuitatea lui f se obţine $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$.

b) Fie γ un drum poligonal şi $F' = f$. Avem

$$\int_\gamma f = \int_0^1 (f \circ \gamma)(t)\, d\gamma(t) = \int_0^1 F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = F(\gamma(t))\Big|_0^1.$$

□

Trebuie remarcată similitudinea construcţiei primitivei cu cazul real. Funcţia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x g(s)\, ds$ este o primitivă a funcţiei continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Drumul de la a la x în $[a,b]$ se poate construi într-un singur mod !

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Avem

$$\int_{[0,i]} f\, dz = z^3/3\Big|_0^i = -i/3 \text{ şi } \int_{|z|=1} f\, dz = 0.$$

2. Fie $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $g(z) = 1/z$. Pentru $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$ care este un contur avem

$$\int_{\gamma_1} g\, dz = 0$$

iar pentru $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = e^{\pi i t}$ avem

$$\int_{\gamma_2} g\, dz = \ln z\Big|_1^{-1} = \ln(-1) - \ln 1 = i\pi.$$

Aceeaşi teoremă 3.3.1 se aplică şi pentru

$$\int_{[1,i]} g\, dz = \ln z\Big|_1^{i} = \ln i = i\pi/2.$$

3. Să calculăm $\displaystyle\int_{[i,1+2i]} z^2 \operatorname{Im} z\, dz$. Drumul având ca imagine segmentul $[i, 1+2i]$ este $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)i + (1+2i)t = 1 + t + 2it$. Avem

$$\begin{aligned}\int_{[i,1+2i]} z^2 \operatorname{Im} z\, dz &= \int_0^1 \gamma^2(t) \cdot \operatorname{Im}\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 [(1+t)^2 + 4it(1+t) - 4t^2] \cdot 2t \cdot (1+2i)\, dt = (-51+38i)/6.\end{aligned}$$

Exerciţii

1) Să se calculeze

a) $\displaystyle\int_{[0,2+i]} \operatorname{Re} z\, dz$; b) $\displaystyle\int_{|z|=1} z \operatorname{Im} z\, dz$; c) $\displaystyle\int_{[1+i,3+2i]} z^3 \operatorname{Im} z\, dz$;

d) $\displaystyle\int_{\gamma_1} |z|\, dz$; e) $\displaystyle\int_{\gamma_2} |z|\, dz$; f) $\displaystyle\int_{\gamma_1} z|z|\, dz$;

g) $\displaystyle\int_{[0,i]} z^3\, dz$; h) $\displaystyle\int_{\gamma_3} z^3\, dz$,

unde $\gamma_1(t) = e^{\pi i t}$, $\gamma_2(t) = e^{\pi i(1-t)}$, $\gamma_3(t) = e^{\frac{\pi}{2} i t}$.

2) Fie P şi Q două funcţii polinomiale încât $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $gr\, Q \geq grP + 2$. Se consideră drumul $\gamma_R(t) = R \cdot e^{\pi i t}$. Să se arate că

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0.$$

3) Fie P şi Q două funcţii polinomiale încât $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \geq 0$, iar $gr\, Q \geq grP + 2$.

Se consideră drumurile $\gamma_R(t) = R \cdot e^{\pi i t}$ şi $\gamma_r(t) = r \cdot e^{\pi i t}$ şi funcţia $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \ln z$. Să se arate că

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0 \text{ şi } \lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0.$$

4) Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $r > 0$. Să se calculeze

$$I_1 = \int_{\gamma_r} \frac{1}{z - z_0}\, dz \text{ şi } I_2 = \int_{\gamma_r} \frac{1}{(z - z_0)^2}\, dz$$

unde $\gamma_r = \partial U(z_0, r)$.

Răspunsuri: 1) a) $2 + i$; b) 0; c) $(2z_2^4 - z_1^4)/4 - (2 - i)(z_2^5 - z_1^5)/100$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_1 = 1 + i$; d) -2; e) 2; f) 0; g) 1/4; h) 0; 2) există $M > 0$ încât $|P(\gamma(t))/Q(\gamma(t))| \leq M \cdot t^{-2}$; 4) $2\pi i$; 0.

3.4 Integrale cu parametru

Integralele cu parametru au apărut teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. În cazul funcţiilor reale există situaţii concrete când nu se poate determina o primitivă a funcţiei $a = a(x, y)$ dar se studiază proprietăţile funcţiei

$$b(y) = \int_a^b a(x, y) dx.$$

Spre exemplu, se poate determina funcţia $b : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $b(y) = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x + y)}{x + 1}\, dx$ calculând mai întâi derivata funcţiei $b'(y) = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{(x + y)(x + 1)}\, dx$.

Rolul integralelor cu parametru în cazul funcţiilor complexe este de remarcat în secţiunea următoare.

Teorema 3.4.1. *Fie γ un drum rectificabil, $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi $g : G \times (\gamma) \to \mathbb{C}$ continuă. Funcţia $h : G \to \mathbb{C}$, definită prin*

$$h(z) = \int_\gamma g(z, \xi)\, d\xi$$

este continuă. Dacă în plus $g(\cdot, \xi)$ este derivabilă pentru orice $\xi \in (\gamma)$ şi $g'_z(z, \xi)$ este continuă pe $G \times (\gamma)$ atunci h este derivabilă pe G şi

$$h'(z) = \int_\gamma g'_z(z, \xi)\, d\xi.$$

Demonstraţie. Fie $z_0 \in G$ arbitrar fixat. Există $r > 0$ încât $\bar{U}(z_0, r) \subseteq G$. Funcţia g fiind continuă pe $\bar{U}(z_0, r) \times (\gamma)$ (închisă şi mărginită deci compactă) este uniform continuă pe $\bar{U}(z_0, r) \times (\gamma)$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $z \in \bar{U}(z_0, r)$ cu $|z - z_0| < \delta$ să avem

$$|g(z, \xi) - g(z_0, \xi)| < \varepsilon / l(\gamma), \text{ pentru orice } \xi \in (\gamma).$$

Din evaluarea

$$|h(z) - h(z_0)| = \Big| \int_\gamma [g(z, \xi) - g(z_0, \xi)]\, d\xi \Big| < \varepsilon, \text{ pentru orice } \xi \in (\gamma),$$

rezultă continuitatea lui h în z_0.

Se presupune acum continuitatea funcţiei $g'_z(z, \xi)$. Din nou, fie $z_0 \in G$ arbitrar fixat. Se defineşte funcţia $g_1 : G \times (\gamma) \to \mathbb{C}$, $g_1(z, \xi) = \begin{cases} \dfrac{g(z,\xi) - g(z_0,\xi)}{z - z_0}, \text{ dacă } (z, \xi) \in (G \setminus \{z_0\}) \times (\gamma) \\ g'_z(z_0, \xi), \text{ dacă } z = z_0, \xi \in (\gamma). \end{cases}$. După cum este definită g_1 este continuă şi $g_1(z_0, \xi) = g'_z(z_0, \xi)$. Din prima parte a demonstraţiei rezultă că funcţia $h_1 : G \to \mathbb{C}$, dată de $h_1(z) = \displaystyle\int_\gamma g_1(z, \xi)\, d\xi$ este continuă pe G. Atunci

$$\lim_{z \to z_0} h_1(z) = h_1(z_0) = \lim_{z \to z_0} \int_\gamma \frac{g(z,\xi) - g(z_0,\xi)}{z - z_0}\, d\xi = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0).$$

Astfel, $h'(z_0) = h_1(z_0) = \displaystyle\int_\gamma g'_z(z_0, \xi)\, d\xi$. □

Exemplu

Fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ şi $\varphi : (\gamma) \to \mathbb{C}$ continuă. Funcţia $h : U(0; 1/2) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$h(z) = \int_{|z|=1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

este derivabilă şi

$$h'(z) = \int_{|z|=1} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi, \text{ pentru orice } z \in U(0; 1/2).$$

Exerciţii

1) Fie γ un drum rectificabil, $G \subseteq \mathbb{C} \setminus (\gamma)$ şi funcţia $\Phi : G \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi.$$

Să se calculeze Φ' şi Φ''.

Dacă $(\gamma) = \partial U(0, 1)$ ce se poate spune despre Φ' ?

2) Fie $\gamma = \partial U(0,1)$ şi funcţia $\Phi : U(0,1) \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \int_\gamma \frac{e^\xi}{\xi - z}\, d\xi.$$

Să se calculeze Φ', Φ'' şi $\Phi^{(n)}$.

Răspunsuri: 1) $\Phi' = 0$; 2) $\Phi^{(n)}(z) = n! \displaystyle\int_\gamma \frac{e^\xi}{(\xi - z)^{(n+1)}}\, d\xi$.

3.5 Integrale de tip Cauchy. Formulele lui Cauchy

Fie γ un drum rectificabil, $G \subset \mathbb{C} \setminus (\gamma)$. Fie $\varphi : (\gamma) \to \mathbb{C}$ continuă. Se defineşte $\Phi : G \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \;\; z \in G.$$

În baza teoremei 3.4.1 funcţia Φ este continuă şi derivabilă. Atunci

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

şi inductiv pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \;\; z \in G.$$

Teorema 3.5.1. (Formula lui Cauchy pentru disc) *Fie $f : \bar{U}(z_0, r)$ continuă. Dacă f este olomorfă pe $U(z_0, r)$ atunci f este nelimitat derivabilă pe $U(z_0, r)$ şi pentri orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $z \in U(z_0, r)$ are loc formula*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

Exemplu

1. Folosind teorema lui Cauchy să calculăm $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\, dz$, $(\gamma) = \partial U(i; 1)$.

   Identificăm $z_0 = i \in U(i; 1)$ şi funcţia $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z + i}$. Atunci $I = 2\pi i f(i) = \pi/e$.

2. Folosind formula lui Cauchy să calculăm $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}\, dz$, $(\gamma) = \partial U(-i; 1)$.

   Identificăm $z_0 = -i \in U(-i; 1)$ şi funcţia $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z - i)^2}$. Atunci $I = 2\pi i f'(-i) = 2\pi(-i/4 + 2i/8)e = 0$.

Exerciţii

1) Folosind teorema lui Cauchy să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-iz}}{(z-i)^7}\,dz$, $(\gamma) = \partial U(i;1)$; b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-2az+1}\,dz$, $a>1$;

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$, $(\gamma) = \partial U(0;1)$. d) $\displaystyle\int_{|z-i|=1/2} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\,dz$;

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{ch} z}{z^n}\,dz, n \in \mathbb{N}^*, (\gamma) = \partial U(0;1)$.

2) Să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=1} 1/z^n\,dz$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Să se calculeze

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz$; b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z}\,dz$;

c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z^n}\,dz, r>0, n \in \mathbb{Z}$; d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1}\cdot e^z\,dz$;

Răspunsuri: 1) a) $-2e\pi i/6!$; b) $-\pi i/\sqrt{a^2-1}$; c) $2\pi i$; d) $-3\pi i/(2e)$; e) $4\pi i[1+(-1)^n]/(n-1)!$; 2) 0, dacă $n \neq 1$ şi $2\pi i$, dacă $n=1$; 3) a) $\pi i(\operatorname{ch} 1)/4$; b) $2\pi i$; c) 0, dacă $n \leq 0$, $2\pi i/(n-1)!$ în rest; d) $-2\pi i/e$.

Capitolul 4

Serii de funcţii olomorfe

Pentru început să reamintim dezvoltările în serie de puteri ale funcţiilor reale elementare:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \ |x| < 1; \tag{4.1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \ x \in \mathbb{R}; \tag{4.2}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Folosind cele trei dezvoltări se mai obţin următoarele astfel: din (4.1) prin substituirea lui x cu $-x$; apoi derivarea termen cu termen pentru $\ln(1+x)$ şi $\cos x$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \ |x| < 1; \tag{4.4}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \ |x| < 1; \tag{4.5}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

În mod natural funcţiile complexe elementare vor avea aceeaşi dezvoltare în serie de puteri încât restrânse la $\mathbb{R}$ să regăsim relaţiile (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) spre exemplu

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \ |z| < 1. \tag{4.7}$$

Pentru funcţiile olomorfe se poate face construcţia seriilor de puteri în mod similar cu cea a funcţiilor reale.

4.1 Serii de puteri

Definiţia 4.1.1. *Fie $G \subset \mathbb{C}$ nevidă şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii $f_n : G \to \mathbb{C}$. O serie de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeşte **convergentă punctual (uniform)** dacă şirul funcţiilor $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ este convergent punctual (uniform).*

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeşte **absolut convergentă** pe $G \subset \mathbb{C}$ dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă pe G.

Teorema 4.1.1. (Weierstrass) *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii. Dacă există o serie cu termeni pozitivi convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ şi există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ încât*

$$|f_n(z)| \leq u_n,\ n \geq n_0, z \in G$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă.

Exemplu

1. Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : U(0,1) \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n/2^n$. Avem

   $$|z^n/2^n| \leq 1/2^n,\ z \in U(0,1).$$

   Din teorema lui Weierstrass deducem că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n/2^n$ este uniform convergentă pe $U(0,1)$.

2. Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : U(0,1/2) \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = \dfrac{1-ni}{1+2ni} z^n$. Avem

   $$|f_n(z)| \leq 1/2^{n+1},\ z \in U(0,1/2).$$

   Din teorema lui Weierstrass deducem că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-ni}{1+2ni} z^n$ este uniform convergentă pe $U(0,1/2)$.

Definiţia 4.1.2. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se numeşte **serie Taylor** (**de puteri**).*

Teorema 4.1.2. (Cauchy-Hadamard)
Fie $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *şi* $R = 1/l$. *Atunci:*

a) $S(z)$ *este absolut convergentă în* $U(z_0, R)$;

b) $S(z)$ *este divergentă în* $\mathbb{C} \setminus \bar{U}(z_0, R)$;

c) $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z - z_0)^n$ *este convergentă în* $U(z_0, R)$.

R din teorema precedentă se numeşte **rază de convergenţă** iar $U(z_0, R)$ se numeşte **disc de convergenţă**.

Exemplu

1. Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n + i)z^n$.

   Avem $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n + i|} = 1$. Astfel raza de convergenţă este $R = 1/l = 1$.

2. Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - ni}{1 + 2ni} z^n$.

   Avem $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1 - ni}{1 + 2ni}\right|} = 1$. Raza de convergenţă este $R = 1/l = 1$.

Teorema 4.1.3. (a dezvoltării în serie de puteri) *Dacă* f *este olomorfă pe* $U(z_0, r)$ *atunci există o serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *convergentă încât*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ pentru orice } z \in U(z_0, r). \tag{4.8}$$

Coeficienţii a_n *sunt daţi de* $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Forma funcţiei olomorfe f din (4.8) se numeşte dezvoltare în serie de puteri în (jurul) lui z_0.

Exemple

1. Să considerăm expresia $f(z) = z \sin z^2$. Dezvoltarea în serie de puteri în jurul punctului 0 se poate face pornind de la dezvoltarea funcţiei sin :

   $$\sin z^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)!} z^{4k+2}, \ z \in \mathbb{C}.$$

   De aici $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)!} z^{4k+3}$, $z \in \mathbb{C}$.

2. Să considerăm expresia $f(z) = 1/z$. Dezvoltarea în serie de puteri în jurul punctului $z_0 = 1$ se poate face pornind de la (4.7):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k, \ |1-z| < 1.$$

Exerciţii

1) Să se dezvolte în jurul lui $z_0 = 0$ funcţiile:

a) $f(z) = \dfrac{1}{1-2z}$; b) $f(z) = \dfrac{1}{1+7z}$; c) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^2}$;
d) $f(z) = z^3 \cos z$; e) $f(z) = ze^z$; f) $f(z) = z\ln(1+z)$.

2) Să se dezvolte expresia $f(z) = \dfrac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}$ după puterile lui $z-1$ şi apoi după puterile lui $z+1$.

3) Să se dezvolte următoarele expresii:
a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ în $1 < |z| < 2$;
b) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(4-z)^2}$ în jurul lui $z_0 = 4$.

4) Fie funcţia $K(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Să se arate că $|a_n| = n$, ($a_n = \dfrac{1}{n!}K^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$).

Indicaţii şi răspunsuri: 1) a) se foloseşte (4.7) cu $z \to 2z$; 2) se descompune expresia în fracţii simple şi apoi se foloseşte (4.7).

4.2 Serii Laurent

Spre deosebire de funcţiile reale, în cazul funcţiilor complexe se poate face un studiu suplimentar în jurul unui punct singular izolat, aceasta cu ajutorul seriilor Laurent.

Definiţia 4.2.1. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. O serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$$

*se numeşte **serie Laurent**.*

Partea

$$T(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

se numeşte **parte tayloriană** iar

$$P(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

se numeşte **parte principală**. Avem

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = P(z) + T(z), \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

Se spune că $S(z)$ este **convergentă** dacă $P(z)$ şi $T(z)$ sunt convergente.

Teorema 4.2.1. (Laurent) *Fie* $z_0 \in \mathbb{C}$ *fixat şi* $0 \leq r_1 < r_2$. *Dacă* f *este olomorfă pe* $U(z_0, r_1, r_2)$ *atunci există* T, P *serii cu razele de convergenţă* $R_1 \geq r_2$ *respectiv* $R_2 \geq 1/r_1$ *astfel încât*

$$f(z) = T(z - z_0) + P(1/(z - z_0)), \text{ pentru orice } z \in U(z_0, r_1, r_2). \tag{4.9}$$

Coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *sunt daţi de*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi, \ n \in \mathbb{Z},$$

cu $(\gamma) = \partial U(z_0, \rho)$, $r_1 < \rho < r_2$.

Concluzia teoremei precedente este că vom avea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ pentru orice } z \in U(z_0, r_1, r_2).$$

Exemple

1. Să scriem seria Laurent corespunzătoare funcţiei $f(z) = \frac{1}{z^5} \sin z^2$. Folosind dezvoltarea în serie de puteri în jurul punctului 0 a funcţiei sin găsim pentru $z \in \mathbb{C}^*$:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{4k+2} = \frac{1}{z^3} + z + \frac{1}{5!} z^5 + \frac{1}{7!} z^9 + \dots + \frac{1}{(2k+1)!} z^{4k-5} + \dots.$$

2. Să scriem seria Laurent corespunzătoare funcţiei $g(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Folosind dezvoltarea în serie de puteri în jurul punctului 0 a funcţiei exponenţiale avem dezvlotarea în serie Laurent a funcţiei $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}$ de unde găsim pentru $z \in \mathbb{C}^*$:

$$g(z) = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^k} = \cdots + \frac{1}{(k+2)!}\frac{1}{z^k} + \cdots + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}z + z^2.$$

Exerciţii

1) Să se scrie seria Laurent corespunzătoare funcţiilor:

a) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$; b) $f(z) = \frac{1}{z^2}\sin z$; c) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$;
d) $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}$; e) $f(z) = e^z e^{\frac{1}{z}}$; f) $f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z^2}$;
g) $f(z) = \frac{1}{z^2}\ln(1+z)$.

2) Să se dezvolte în serie Laurent în jurul lui $z_0 = 1$ funcţia $f(z) = \sin\frac{1}{z-1}$.

3) Să se scrie dezvoltarea în serie in jurul lui $z_0 = 0$ a funcţiilor:

a) $f(z) = \sin(1/z)$; b) $f(z) = \sin(1/z^2)$; c) $f(z) = \sin^2(1/z)$;
d) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2}$; e) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z(1-z)^2}$.

4.3 Teorema reziduurilor

Aplicaţiile teoremei reziduurilor constau atât în calcularea unor integrale cât şi în determinarea numărului de rădăcini ale unei ecuaţii (nu neapărat polinomiale) într-un domeniu dat.

Definiţia 4.3.1. *Fie $G \subset \mathbb{C}$, f olomorfă pe G şi $z_0 \notin G$. Punctul $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se numeşte* **punct singular** *dacă există $(U(z_0, r) \setminus \{z_0\}) \subset G$ încât f să fie olomorfă pe $U(z_0, r)$.*

Are loc următoarea clasificarea a punctelor singulare:

i) **eliminabil**, dacă

a) există $\tilde{f}$ olomorfă pe $G \cup z_0$ încât $\tilde{f} \mid_G = f$,

sau

b) există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

sau

c) partea principală este *nulă*.

Exemple: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$; $g(z) = \dfrac{z+i}{z^2+1}$, $z_0 = -i$.

ii) **pol**, dacă

b') există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

sau

c') partea principală este *finită*.

Exemple: $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$; $g(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$, $z_0 = i$.

iii) **izolat esenţial**, dacă

b") nu există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

sau

c") partea principală este *infinită*.

Exemple: $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$, $z_0 = 1$; $g(z) = \sin \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

Dacă z_0 este un pol multiplu de ordinul n atunci **reziduul** funcţiei f în z_0 este

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Se spune despre un pol de ordinul $n = 1$ că este un pol **simplu**.

Este recomandabilă utilizarea formulei lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii

$$(f_1 \cdot f_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(k)} \cdot f_2^{(n-k)}.$$

Exemplu

1. Să calculăm $\text{Rez}\,(f, z_0)$ pentru $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 6z + 10}$.

Polii $z_1 = -3 - i$ şi $z_2 = -3 + i$ sunt simpli. Avem

$$\text{Rez}\,(f, z_1) = \lim_{z \to z_1}[(z - z_1)f(z)] = \lim_{z \to z_1} \frac{z}{z - z_2} = z_1/(z_1 - z_2) = (1 - 3i)/2;$$

$$\text{Rez}\,(f, z_2) = \lim_{z \to z_2}[(z - z_2)f(z)] = \lim_{z \to z_2} \frac{z}{z - z_1} = z_2/(z_2 - z_1) = (1 + 3i)/2.$$

2. Să calculăm $\text{Rez}\,(f, z_0)$ pentru $f(z) = \dfrac{1}{(z + i)(z^2 + 4)^3}$.

$z_0 = -i$ este un pol simplu. Avem

$$\text{Rez}\,(f, -i) = \lim_{z \to -i}[(z + i)f(z)] = \lim_{z \to -i} \frac{1}{(z^2 + 4)^3} = 1/27.$$

$z_0 = -2i$ şi $z_0 = 2i$ sunt poli multipli de ordinul 3. Avem

$$\text{Rez}\,(f, -2i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -2i}[(z + 2i)^3 f(z)]^{(2)} = \frac{1}{2} \lim_{z \to -2i}[\frac{1}{(z + i)(z - 2i)^3}]^{(2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -2i}[C_2^0 \frac{2}{(z + i)^3} \frac{1}{(z - 2i)^3} + C_2^1 \frac{-1}{(z + i)^2} \frac{-3}{(z - 2i)^4} + C_2^2 \frac{1}{(z + i)} \frac{12}{(z - 2i)^5}]$$

$$= [(-2)/4^3 + (-6)/4^4 + (-12)/4^5]/2 = -34/4^5;$$

$$\text{Rez}\,(f, 2i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2i}[(z - 2i)^3 f(z)]^{(2)} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2i}[\frac{1}{(z + i)(z + 2i)^3}]^{(2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2i}[C_2^0 \frac{2}{(z + i)^3} \frac{1}{(z + 2i)^3} + C_2^1 \frac{-1}{(z + i)^2} \frac{-3}{(z + 2i)^4} + C_2^2 \frac{1}{(z + i)} \frac{12}{(z + 2i)^5}]$$

$$= [(-2)/(3^3 \cdot 4^3) + (-6)/(3^2 \cdot 4^4) + (-12)/(3 \cdot 4^5)]/2 = -106/(3^3 \cdot 4^5).$$

Exerciţii

1) Să se calculeze $\text{Rez}\ (f, z_0)$, $z_0 \in \{-i, i\}$ pentru:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$; b) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 1)^2}$;

c) $f(z) = \dfrac{z}{(z - i)(z^2 + 1)}$; d) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 1)^n}, n \in \mathbb{N}^*$.

2) Să se calculeze $\text{Rez}\ (f, z_0)$, pentru:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z + 2}$; b) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 4z + 5}$;

c) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 6z + 13)^2}$; d) $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_1)^m (z - z_2)^n}, m, n \in \mathbb{N}^*, z_1 \neq z_2$.

Răspuns: 1) a) $1/2; 1/2$; b) $0; 0$; c) $i/4; -i/4$; d) $(-1)^n C_{2n-2}^{n-1}$; $(-1)^n C_{2n-2}^{n-1}$.

2) a) $(1 + i)/2; (1 - i)2$; b) $(4 - 3i)/2; (4 + 3i)/2$; c) $3i/32; -3i/32$;

d) $(-1)^{m-1} C_{n+m-2}^{n-1} \cdot 1/(z_1 - z_2)^{n+m-1}; (-1)^{m-1} C_{n+m-2}^{n-1} \cdot 1/(z_2 - z_1)^{n+m-1}$.

4.4 Aplicaţii la calculul unor integrale

Vom considera câteva tipuri de integrale care pot fi calculate cu ajutorul teoremei reziduurilor, astfel evitându-se determinarea unei primitive nu de puţine ori aceasta fiind o cale destul de dificilă şi cu mult calcul.

I) $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx.$

Se efectuează schimbarea de variabilă

$$z = e^{ix} \qquad (= \cos x + i \sin x).$$

Deoarece $\arg z = x \in [0, 2\pi]$ numărul complex z parcurge cercul unitate. Avem $dz = i \cdot e^{ix} dx$, de unde $dx = -idz/z$. Apoi $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}$, astfel că

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{1}{z} R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big) dz.$$

Exemplu

Fie

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{(3-2\cos x)^2}\, dx.$$

Evident expresia raţională este $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{1+\sin x}{(3-2\cos x)^2}$. Înlocuind dx, $\cos x$, $\sin x$ se ajunge la

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \frac{1 + \dfrac{z^2-1}{2iz}}{(3-2\dfrac{z^2+1}{2z})^2}\, dz = -\int_{|z|=1} \frac{z^2+2iz-1}{(z^2-3z+1)^2}\, dz.$$

Există doi poli (dubli) $z_1 = (3+\sqrt{5})/2$ cu $|z_1| > 1$ şi $z_2 = (3-\sqrt{5})/2$ cu $|z_2| < 1$. Atunci

$$I = -2\pi i \mathrm{Rez}\,(f, z_2) = -2\pi i \lim_{z \to z_2} \big[(z-z_2)^2 \frac{z^2+2iz-1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\big]',$$

unde $f(z) = \dfrac{z^2+2iz-1}{(z^2-3z+1)^2}$. Se obţine $I = \pi(10 + \sqrt{5} \cdot z_2)/25$.

Rezultatul unei asemenea integrale este întotdeauna un **numă real** ! Greşelile de calcul sunt frecvente.

Exerciţii

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{2+\cos x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}\,dx, a>1$; c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+A\sin x}\,dx, 0<A<1$;
d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{A+B\cos x+C\sin x}\,dx, A^2>B^2+C^2$; e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,dx, 0<p<1.$

Răspuns: a) $2\pi\sqrt{3}/3$; b) $2\pi/\sqrt{a^2-1}$; c) $2\pi/\sqrt{1-A^2}$; d) $2\pi/\sqrt{A^2-B^2-C^2}$; e) $2\pi/(1-p^2)$.

O *variaţiune* pe această temă ar fi integralele de tipul:

I') $I_m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot R(\cos x, \sin x)\,dx$; $m \in \mathbb{N}$.

Se consideră $J_m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot R(\cos x, \sin x)\,dx$ şi apoi se calculează $I_m + iJ_m$. Se efectuează aceeaşi schimbare de variabilă, $z = e^{ix}$. Se ţine cont de $\cos mx + i\sin mx = e^{imx} = z^m$.

Exerciţii

Pentru $m \in \mathbb{N}$ să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{5-4\cos x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-2p\cos x+p^2}\,dx,\ 0<p<1.$

Răspuns: a) $\pi/(3\cdot 2^{m-1})$; b) $2\pi p^{m+1}/(1-p^2)$.

II) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, unde
$Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $gr\,Q \geq gr P + 2$.
Se alege drumul $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, unde $\gamma_R(t) = R \cdot e^{\pi i t}$.
Avem $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$ (exerciţiul 2, secţiunea 3.3).
Prin aplicarea teoremei reziduurilor avem

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Rez}\ (f, z_k).$$

astfel că se obţine
$I = 2\pi i \displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Rez}\ (f, z_k).$
Exemplu

1. Fie $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx$. Identificăm $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}$. Astfel

$$I = 2\pi i[\mathrm{Rez}\,(f, i) + \mathrm{Rez}\,(f, 2i)] = 2\pi i[-i/18 + 11i/288] = 5\pi/144.$$

2. Fie $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx$. Identificăm $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$. Astfel

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Rez}(f, z_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Rez}(f, z_k).$$

Aici $z_k^6 = -1$ sau $z_k = \cos[(\pi+2k\pi)/6] + i\sin[(\pi+2k\pi)/6]$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
Avem, pentru $k \in \{0,1,2\}$

$$\operatorname{Rez}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} (z-z_k)f(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}.$$

Obţinem

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \frac{-z_k}{6} = 2\pi[\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}]/6 = 2\pi/3.$$

Exerciţii

Să se calculeze:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2}\, dx$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^8+1}\, dx$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^3}\, dx$;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4+1)^2}\, dx$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)(x^2+16)}\, dx$;

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$;

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}\, dx, 0 < a < b$;

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\, dx$;

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx$;

j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\, dx$.

Răspuns: a) $\pi/8$; b) $\pi(\sqrt{2}+1)/4$; c) $-\pi/324$; d) $\pi/\sqrt{2}$; e) $\pi/720$; f) π; g) $\pi/2 \cdot 1/(a^2-b^2)^2 \cdot (1/a^3 + 1/b^3)$; h) $2\pi/3$; i) $n/4^n$; j) $5\pi/96$.

III) $I = \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, unde
$Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \geq 0$, iar $gr\, Q \geq gr P + 2$.
Se alege drumul $\gamma = \gamma_R \cup [R,r] \cup \overline{\gamma}_r \cup [r,R]$, unde $\gamma_R(t) = R\cdot e^{2\pi i t}$ şi $\gamma_r(t) = r\cdot e^{2\pi i t}$.
Prin aplicarea teoremei reziduurilor funcţiei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \ln z$ avem

$$-\int_{\gamma_r} f(z)\, dz + \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)}\big[\ln x + 2\pi i\big]\, dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{Q(z_k)=0} \operatorname{Rez}(f, z_k).$$

Avem $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ şi $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0$. Obţinem

$$I = -\sum_{Q(z_k)=0} \text{Rez }(f, z_k).$$

Exemplu

Fie $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$. Identificăm $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+1)}\ln z$. Astfel

$$\begin{aligned} I &= -[\text{Rez}\,(f,-1) + \text{Rez}\,(f,-i) + \text{Rez}\,(f,i)] \\ &= -[\ln(-1)/2 + (-1+i)\ln(-i)/4 + (1+i)\ln i/4] = \pi/4. \end{aligned}$$

Exerciţii

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^7(x+7)}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2}\,dx$.

Răspuns: a) $2\pi\sqrt{3}/3$; b) $(4^7-3^7)/24^7$; c) $1/2$.

Bibliografie

[1] Bogdan, M., Curs de teoria integralei, 2002.

[2] Dincă, M., Chiriţă, M., Numere complexe în matematica de liceu, Editura All Educational, Bucureşti, 1996.

[3] Cazacu, C., A., colectiv, Analiză complexă, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988.

[4] Hamburg, P., Mocanu, P., Negoescu, N., Analiză matematică. Funcţii complexe, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[5] Kohr, D., Mocanu, P. T., Capitole speciale de analiză complexă, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[6] Homentcovschi, D., Funcţii complexe cu aplicaţii în ştiinţă şi tehnică, Editura tehnică, Bucureşti, 1986.

[7] Halanay, A., Elemente de analiză complexă, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1999.

[8] Rudin, W., Analiză reală şi complexă, Editura Theta, Bucureşti, 1999.

[9] Sidorov, Y. V., Fedoryuk, M. V., Shabunin, M. I., Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable, Mir Publishers, Moscow, 1985.

[10] Stoka, M., Culegere de probleme de funcţii complexe, Editura tehnică, Bucureşti, 1965.